

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

L'HOMOLOGIE DE KHOVANOV : DE LA DÉFINITION À LA
RÉSOLUTION DE LA CONJECTURE DE MILNOR

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

PAR
MAXIME SCOTT

DÉCEMBRE 2013

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier mon directeur Olivier Collin qui a su me guider à travers chacune des étapes de ma maîtrise. Il m'aida grandement à choisir un sujet que j'ai trouvé palpitant en plus de commenter ma progression. Il m'a aussi poussé à assister à de nombreuses conférences et à parfaire mes connaissances mathématiques.

Je voudrais ensuite remercier l'ensemble de mes professeurs à l'UQAM. Ils m'ont motivé pendant tout mon cheminement à toujours vouloir en apprendre davantage. Parmi ceux-ci, je remerciais en particulier Christophe Hohlweg qui m'a introduit aux mathématiques et qui a su m'apprendre à bien les écrire, Steven Boyer qui a vraiment marqué mon passage à la maîtrise en m'enseignant les rudiments de la topologie algébrique et de la théorie des noeuds.

Merci beaucoup à tous les enseignants m'ayant donné la chance d'être démonstrateur dans leur cours. Cela m'a poussé à comprendre tous les détails des cours que j'avais déjà suivi et à tenter de mon mieux de transmettre mes connaissances. Merci à Michel Adès, Fernand Beaudet, Olivier Collin et Steven Lu pour cela.

Merci à tous les employés de soutien, les secrétaires pour leur travail fabuleux qui m'a permis, entre autres, d'organiser des activités, d'assister à des conférences et de faire en sorte que mon passage à l'UQAM se déroule dans le bon ordre.

Je ne voudrais surtout pas oublier de remercier les démonstrateurs qui m'ont permis de mieux comprendre le contenu de chacun de mes cours. Parmi toutes ces personnes, je tiens à remercier de tout mon coeur Radu Cebanu qui n'a jamais compté les heures passées à nous instruire. Sa passion pour les mathématiques fut contagieuse et m'a poussé à me dépasser en permanence.

Merci aussi à Jérôme Tremblay qui m'a grandement aidé avec tous mes problèmes de LaTeX et à qui j'ai volé beaucoup d'heures de travail. Merci pour cette grande patience et pour ce support.

Bien évidemment, un séjour universitaire ne serait absolument pas le même si nous ne pouvions compter sur personne. C'est avec un pincement au coeur que je remercie tous mes amis de l'UQAM et toutes les personnes ayant étudié avec moi. Marco Robado pour les innombrables heures pendant lesquelles nous parlions de mathématiques, Alex Provost qui est l'une des personnes les plus passionnées que j'ai eu la chance de voir dans ma vie; partager mon bureau avec deux bons amis comme vous fut des plus agréable. Alice Puigmal Remal une grande amie qui m'a appris qu'une pause était toujours bien méritée. Catherine Bourbeau, avec qui j'ai organisé tant d'activités pour les étudiants gradués. Merci également à Jean-François Bosc, Huygens Ravelomanana et Jonathan Lemaire-Beaucage pour les heures passées à étudier les mystères topologiques et géométriques. Il y a bien sûr aussi Jean-François Arbour, Lionel Katshingu, Hugo Tremblay, Jérôme Fortier et Hugo Deschênes avec qui j'ai eu la chance de bien m'amuser.

Un merci spécial à mon équipe de badminton avec qui j'ai eu la chance de jouer pendant les 5 dernières années. L'équilibre que vous m'avez apporté a grandement contribué à l'ensemble de ce que j'ai pu réussir jusqu'à présent. Partager les joies et les peines du sport avec vous aura été un grand honneur pour moi. Antoine Bélanger, Valérie St-Jacques, Catherine Girouard, Francis Soucy, Jérôme Charron, Simon Langelier, Hoang-Nam Vô-Lê, Herbert Nguyen, Charles Bradette, François Bourret, Philippe Gaumond, Florian Gauthier, Rachel Blanchar, Maude Champagne, Amélie Vézina et tous les autres, je vous dis merci.

Merci à mes amis de toujours, Louis-Marc Lambert, Martin Beauregard et Maxime Tétrault pour m'avoir soutenu, encouragé et compris depuis mon enfance. Votre présence, vos opinions et votre bonne humeur ne sont que quelques aspects de votre personnalité qui font de vous mes meilleurs amis.

Merci à Dror Bar-Natan, qui m'a donné de nombreuses images pour mon mémoire. Cela m'a permis d'épargner un temps considérable et de me concentrer davantage sur les mathématiques.

Merci aussi à Charles Livingston et Jae Choon Cha qui m'ont fourni des infor-

mations précieuses pour le calculs de certains invariants de noeuds à travers à leur merveilleux site internet *KnotInfo*.

Finalement, je tiens à dire un gros merci à ma famille, Sylvie, Marc, Alexandre et Dominick ainsi qu'à tous mes amis. Sans vous je n'y serai probablement jamais parvenu. Vous m'avez insufflé la volonté et l'énergie pour y arriver. Pour cela je vous serai redevable éternellement.

Merci

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
UNE APPROCHE TOPOLOGIQUE DE L'HOMOLOGIE DE KHOVANOV . .	5
1.1 Définition des structures pour l'invariant de Khovanov	5
1.2 La suite d'espaces vectoriels associée à un noeud	9
1.3 La définition de la différentielle	13
1.4 L'invariance topologique	16
1.5 Quelques remarques sur l'homologie de Khovanov	23
CHAPITRE II	
LES COBORDISMES	25
2.1 Cobordismes et enchevêtrements	25
2.2 La catégorie des cobordismes	27
2.3 Homotopie et invariance	31
2.4 Catégorie graduée et caractéristique d'Euler	41
2.5 Homologie de Khovanov et polynôme de Jones	44
CHAPITRE III	
LA CONJECTURE DE MILNOR	49
3.1 Le genre slice d'un noeud	49
3.2 La théorie de Lee	52
3.3 Filtrations et suites spectrales	56
3.4 L'invariant de Rasmussen	59
3.5 L'invariant de Rasmussen et le genre slice	63
CONCLUSION	69
BIBLIOGRAPHIE	71

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Résolutions d'un croisement	9
1.2 Résolutions du noeud de trèfle	10
1.3 Espaces vectoriels du complexe de chaînes pour l'entrelacs de Hopf . . .	11
1.4 Calcul du complexe de Khovanov du noeud trèfle avec les cubes de résolutions.	12
1.5 Complexes de chaînes pour l'invariance sous R2	20
2.1 Règle pour les signes dans le cubes	27
2.2 Composition des cobordismes	28
2.3 Résolution du noeud trèfle.	30
2.4 Isotopie des selles	31
2.5 Rétraction forte	34
2.6 Invariance sous le deuxième mouvement de Reidemeister	38
2.7 Pantalons renversés	45
3.1 Orientations pour les droites de s_0	55
3.2 Courte suite exacte pour la résolution d'une somme connexe de noeuds. . .	61

RÉSUMÉ

Ce mémoire a pour but de présenter une preuve relativement simple de la conjecture de Milnor qui affirme que le genre slice est égal au genre de Seifert pour les noeuds toriques. Pour ce faire, nous définirons l'homologie de Khovanov en ne supposant que des rudiments de topologie algébrique. Nous utiliserons ensuite les travaux de (Lee, 2005) afin de comprendre l'invariant de Rasmussen $s(K)$ qui fut défini pour la première fois dans (Rasmussen, 2010). Cet invariant nous permettra d'établir une borne pour le genre slice d'un noeud et permettra finalement de généraliser la conjecture de Milnor en établissant un lien entre les genres slice et de Seifert pour les noeuds positifs.

INTRODUCTION

La théorie des noeuds est un sujet mathématique qui fut introduit en 1771 par Vandermonde. À cette époque, les noeuds étaient un objet d'utilité courante, mais les raisons justifiant l'étude de cette théorie ont grandement changé au cours de son histoire. De nos jours, les mathématiciens étudient les noeuds principalement pour leurs liens avec d'autres sujets mathématiques plus abstraits. Un de ces sujets est la topologie de basse dimension et il est possible de créer de nouvelles variétés en utilisant la notion de chirurgie de noeuds. Cela permet entre autres aux mathématiciens de trouver des exemples de nouvelles variétés.

Cependant, il est très difficile d'étudier les noeuds puisque chaque noeud possède une infinité de diagrammes le représentant. Il est donc possible de construire un diagramme extrêmement compliqué représentant tout simplement le noeud trivial. Étant donné deux diagrammes, on ne sait pas, en général, déterminer s'ils proviennent du même noeud. Les mathématiciens ont alors inventé des invariants leur permettant de s'assurer que deux noeuds sont différents l'un de l'autre. Au début, la majorité des invariants étaient liés à des propriétés topologiques du noeud, mais de nombreux invariants algébriques ont vu le jour par la suite. Malheureusement, il est souvent difficile de comprendre quelles propriétés topologiques sont détectées par un invariant algébrique. Les groupes d'homologie du complémentaire d'un noeud, le polynôme d'Alexander ainsi que le polynôme de Jones sont quelques exemples d'invariants de noeuds.

Le polynôme de Jones fut découvert dans les années 80 par Vaughan Jones. Il s'agit d'un invariant combinatoire que l'on peut calculer à l'aide d'un algorithme simple et s'exprime comme un polynôme de Laurent en q . La facilité avec laquelle on peut le calculer l'a vite rendu populaire. Plus topologiquement, nous avons que le polynôme de Jones associé à l'image miroir d'un noeud K est simplement obtenu en changeant q par

q^{-1} . Cela permet entre autres de prouver assez facilement que certains noeuds ne sont pas chiraux. On sait qu'il existe des entrelacs ayant un polynôme de Jones trivial, comme le noeud trivial. Cependant, la question de savoir s'il existe un noeud non-trivial dont le polynôme de Jones est trivial demeure une question ouverte.

C'est en voulant généraliser le polynôme de Jones que Khovanov a développé un nouvel invariant homologique auquel nous nous intéresserons dans ce mémoire. Le premier chapitre servira à définir l'homologie de Khovanov en associant à chaque noeud un complexe de chaînes muni d'une différentielle, la seconde étape de ce chapitre sera alors de prouver que l'homologie de Khovanov est un invariant pour les noeuds et que sa caractéristique d'Euler graduée est le polynôme de Jones. Nous donnerons ensuite des exemples de noeuds que l'homologie de Khovanov est en mesure de distinguer et qui ont pourtant le même polynôme de Jones.

Dans le second chapitre, nous présenterons l'homologie de Khovanov d'une manière plus abstraite. Nous rappellerons d'abord des notions de base en théorie des catégories. Nous allons ensuite introduire les notions de cobordismes et d'enchevêtrement pour pouvoir définir notre nouveau complexe de chaînes. Nous devons toutefois considérer ces objets à homotopie près afin d'en faire un invariant pour les noeuds. L'avantage de cette approche est que les différentielles sont très visuelles ce qui les rend simples à manipuler. La caractéristique d'Euler nous permettra alors de poser une graduation sur le complexe de chaînes et nous permettra alors de démontrer que l'homologie du complexe est un invariant. Ces notions serviront alors à définir différents foncteurs nous permettant d'obtenir différents invariants homologiques.

La construction de cette homologie demeure toutefois très algébrique. Il est donc assez difficile de savoir si elle liée à des propriétés topologiques de noeuds. Le dernier chapitre se concentrera alors à expliquer un lien entre cet invariant et la topologie du noeud. En effet, Jacob Rasmussen a découvert que l'on pouvait utiliser l'homologie de Khovanov pour décrire un invariant qui est étroitement lié au genre slice d'un noeud. Le dernier chapitre de ce mémoire explorera donc le lien entre cet invariant et le genre slice d'un

noeud. Dans le cas des noeuds positifs, nous montrerons que cet invariant est en fait proportionnel au genre slice, ce qui nous permettra de conclure ce mémoire avec une preuve combinatoire de la conjecture de Milnor pour les noeuds toriques.

CHAPITRE I

UNE APPROCHE TOPOLOGIQUE DE L'HOMOLOGIE DE KHOVANOV

Dans ce chapitre, nous construirons une catégorification du polynôme de Jones. Cette catégorification est une idée de Khovanov qui a pensé à remplacer les polynômes par des espaces vectoriels gradués. Nous pouvons ensuite construire un complexe de chaîne d'espaces vectoriels à partir duquel nous pourrions calculer le polynôme de Jones. Néanmoins, ce complexe de chaînes ne sera pas un invariant topologique de L . Nous prouverons toutefois que son homologie, dont la caractéristique d'Euler gradué sera le polynôme de Jones, sera un invariant topologique.

1.1 Définition des structures pour l'invariant de Khovanov








Définition 1.1.1. Un noeud $K \subset S^3$ est l'image d'un plongement lisse d'un cercle S^1 dans S^3 . Un entrelacs L de m composantes est la réunion disjointe de m noeuds dans S^3 .

Remarque 1.1.1. Il est aussi possible de considérer les noeuds comme étant l'image de plongements de cercles dans \mathbb{R}^3 plutôt que dans S^3 en retirant un point de S^3 et en utilisant la projection stéréographique.

En théorie des noeuds, nous considérons souvent ce que l'on appelle le diagramme d'un noeud. Il s'agit de la projection de notre noeud dans \mathbb{R}^2 . Pour éviter de perdre de l'information, nous devons conserver la propriété d'un brin de passer au dessus d'un autre. Il est toujours possible de faire en sorte que les croisements dans notre diagramme

correspondent à un unique brin passant au dessus d'un autre. Bien évidemment, pour un même noeud il peut y avoir plusieurs diagrammes selon la projection choisie. Il est possible de montrer que deux diagrammes sont équivalents (i.e les deux diagrammes représentent le même noeud) si et seulement si on peut passer d'un diagramme à l'autre en faisant un nombre fini de mouvements dits de Reidemeister.

Définition 1.1.2. Il existe trois mouvements de Reidemeister :

- (1) Le premier mouvement de Reidemeister nous permet de passer de  vers  vers .
- (2) Le second mouvement de Reidemeister est l'équivalence entre  et .
- (3) Le troisième mouvement de Reidemeister consiste à passer de  à .

Remarque 1.1.2. L'une des utilités des mouvements de Reidemeister se trouve dans les preuves d'invariance sous isotopies. En effet, lorsque nous avons un objet associé à des diagrammes de noeuds, il suffit de montrer qu'il ne change pas lorsque nous faisons un mouvement de Reidemeister pour que celui-ci soit un invariant isotopique du noeud.

Pour l'ensemble de ce chapitre, nous poserons $V := V_- \oplus V_+$ un espace vectoriel gradué où v_{\pm} sont les éléments de la base de V .

Définition 1.1.3. Soit $W = \bigoplus_m W_m$ un espace vectoriel gradué avec pour composantes homogènes W_m . La dimension graduée de W est la série de puissance

$$q\dim W := \sum_m q^m \dim W_m$$

Exemple 1.1.1. Soit l'espace vectoriel V . Alors $V = V_{-1} \oplus V_1$ et sa dimension graduée est $q\dim V = q^{-1} + q$.

Exemple 1.1.2. Prenons par exemple l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[x]$. On peut voir cet espace vectoriel comme

$$\mathbb{R}[x] = \bigoplus_n \langle x^n \rangle$$

où $\langle x^n \rangle$ représente l'espace vectoriel engendré par x^n . Nous pouvons alors calculer sa dimension graduée, ce qui nous donne :

$$q\dim \mathbb{R}[x] = \sum_n q^n.$$

Exemple 1.1.3. On peut aussi considérer l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels à deux variables $\mathbb{R}[x, y]$. Nous avons que

$$\mathbb{R}[x, y] = \bigoplus_n \bigoplus_{i=0}^n \langle x^i y^{n-i} \rangle.$$

Sa dimension graduée est alors $q\dim \mathbb{R}[x, y] = \sum_n (n+1)q^n$.

La dimension graduée d'un espace vectoriel nous donne alors un polynôme. Par contre, il est parfois utile de pouvoir modifier le degré des polynômes provenant de nos espaces vectoriels. Pour ce faire, nous définissons un opérateur sur les espaces vectoriels comme suit :

Définition 1.1.4. Soit $\cdot\{l\}$ l'opération de changement de degré d'un espace vectoriel gradué. C'est-à-dire que si $W = \bigoplus_m W_m$ est un espace vectoriel gradué, on pose $W\{l\}_m := W_{m-l}$. Nous avons donc que $q\dim W\{l\} = q^l q\dim W$. On dit alors qu'un élément de W_m est un élément de degré m

Remarque 1.1.3. Si nous avons un tenseur, on dit que le degré du tenseur est la somme des degrés de chacun de ses éléments. Donc, nous aurons que $v_- \otimes v_+$ est de degré 0, tandis que $v_+ \otimes v_+$ est de degré 2.

Nous pouvons reprendre les exemples précédents et regarder comment agit le changement de degré dans chacun des cas.

Exemple 1.1.4. Prenons l'espace vectoriel V . Nous avons alors que $V\{2\} = V_1 \oplus V_3$. Sa dimension graduée est donc $q\dim V\{2\} = q + q^3$.

Exemple 1.1.5. Prenons maintenant l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. En faisant un changement de degré, on obtient que

$$\mathbb{R}[x]\{l\} = \bigoplus_{n=l}^{\infty} \langle x^{n-l} \rangle.$$

Nous avons donc que sa dimension graduée est $q\dim \mathbb{R}[x] = \sum_{n \geq 0} q^{n+l}$.

Nous devons aussi souvent manipuler des complexes de chaînes d'espaces vectoriels afin de développer l'invariant de Khovanov. Étant donné que nous voulons retrouver le polynôme de Jones à partir de l'homologie, il faudra à l'occasion faire un décalage des indices du complexe de chaînes associé. Pour ce faire, nous introduisons l'opérateur suivant :

Définition 1.1.5. Soit $\cdot[s]$ le décalage d'un complexe de chaînes. C'est-à-dire que si $\bar{\mathcal{C}}$ est un complexe de chaîne $\dots \rightarrow \bar{\mathcal{C}}^r \xrightarrow{d^r} \bar{\mathcal{C}}^{r+1} \rightarrow \dots$ et si $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}}[s]$, alors on a que $\mathcal{C}^r = \bar{\mathcal{C}}^{r-s}$.

Remarque 1.1.4. Dans la dernière définition, on a aussi que les différentielles du complexe de chaînes sont affectées par le décalage.

Maintenant que nous avons établi les notions de bases, nous pouvons commencer à expliquer ce qu'est l'homologie de Khovanov. On sait de la définition d'un complexe de chaînes que la composition de deux morphismes est nulle, c'est-à-dire que $d^r \circ d^{r+1} = 0$. Nous avons donc que $\text{Im } d^{r+1} \subseteq \text{Ker } d^r$. On dit qu'une suite est exacte lorsque $\text{Im } d^{r+1} = \text{Ker } d^r \ \forall r \in \mathbb{N}$. L'homologie mesure en quelque sorte l'inexactitude d'un complexe de chaînes. On cherche à savoir qu'est-ce qui appartient au noyau de notre application, sans toutefois être dans l'image de l'application précédente.

Définition 1.1.6. Le n -ième groupe d'homologie associé à un complexe de chaînes (\mathcal{C}) est $\mathcal{H}^n := \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n+1}$ où $d^r : \mathcal{C}^r \rightarrow \mathcal{C}^{r-1}$.

Maintenant que nous savons en quoi consiste l'homologie associée à un complexe de chaînes, nous allons trouver une façon algorithmique d'associer à un noeud un complexe de chaînes. La première étape consistera à trouver une suite d'espaces vectoriels pour un noeud donné. Une fois que cela sera fait, nous définirons des applications qui feront que notre suite d'espaces vectoriels deviendra un complexe de chaînes.

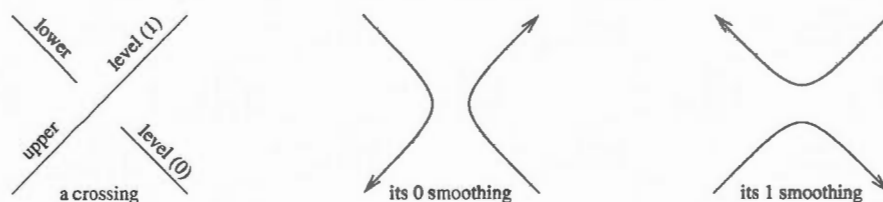


Figure 1.1 Résolutions d'un croisement

1.2 La suite d'espaces vectoriels associée à un noeud

Il nous faut maintenant trouver une façon de prendre un noeud et d'extraire une suite d'espaces vectoriels. Pour ce faire, nous devons tout d'abord introduire une nouvelle notion, la résolution d'un croisement. Cette notion nous permet de faire disparaître un croisement dans le diagramme de notre noeud. Une fois tous les croisements résolus, nous obtenons un ensemble de cercles, ce qui nous permettra de donner notre suite d'espace vectoriel.

Définition 1.2.1. On appelle une résolution d'un croisement les deux opérations suivantes ; L'opération 0-lisse : $\times \rightarrow \smile$ et l'opération 1-lisse : $\times \rightarrow \frown$. On dit que nous avons une résolution d'un diagramme de l'entrelacs L lorsque nous considérons un nouveau diagramme où chaque croisement a été résolu soit par une opération 0-lisse ou une opération 1-lisse. On appelle le poids d'une résolution α , noté $|\alpha|$, le nombre d'opérations 1-lisse utilisées pour résoudre le noeud. Ces deux opérations sont explicitées dans la figure 1.1.

Remarque 1.2.1. Une fois que tous les croisements d'un entrelacs sont résolus, le diagramme obtenu est un ensemble de cercles. Une des façons de nommer les résolutions consiste à donner une suite de longueur n de 0 et de 1 lorsque nos croisements sont ordonnés. La i -ième composante de la suite désigne l'opération utilisée pour résoudre le i -ième croisement.

La méthode que nous utiliserons pour calculer de façon algorithmique notre suite d'espaces vectoriels est analogue à celle pour calculer le polynôme de Jones. Une fois que

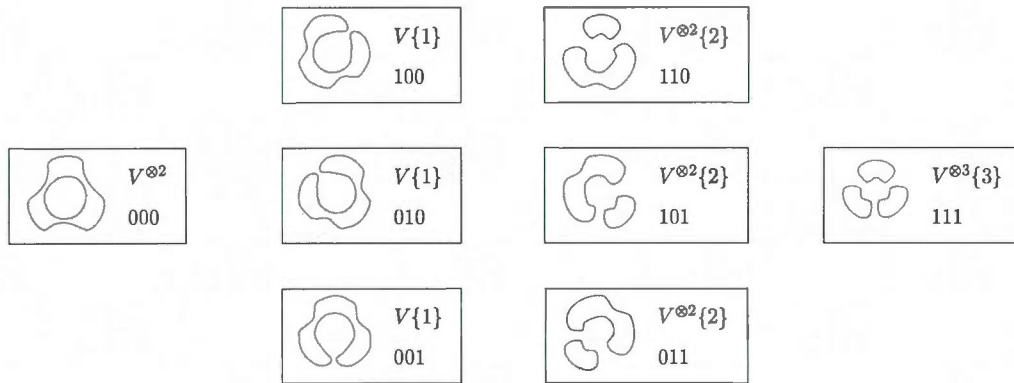


Figure 1.2 Résolutions du noeud de trèfle

nous avons toutes les résolutions possibles, nous devons mettre un ordre partiel sur ces résolutions et ainsi former ce que l'on appelle un cube de résolutions.

Tout d'abord, il faut numéroter les croisements de notre entrelacs de 1 jusqu'à n . Une fois que cela est fait, nous considérons tous les n -uplets $\{0, 1\}^n$. La i -ième coordonnée de notre n -uplet correspond à la résolution lisse choisie pour résoudre le i -ième croisement de notre entrelacs. Nous avons donc 2^n n -uplets différents, ce qui est aussi le nombre de sommets d'un n -cube. Nous avons alors que nous pouvons construire un cube qui a pour sommet les résolutions de notre entrelacs. C'est donc dire que chaque somme correspond à un ensemble de cercles. Pour véritablement voir le cube, nous devons mettre un ordre partiel sur les n -uplets. Pour ce faire, on prend comme ordre partiel le poids de chaque résolution. On place alors une arête entre deux résolutions si la différence de leurs poids est 1. On peut alors associer une suite d'espaces vectoriels à notre cube. Pour chaque sommet, nous allons prendre l'espace vectoriel $V_\alpha(L) := V^{\otimes k}\{r\}$, où k est le nombre de cercles dans la résolution α et $r = |\alpha|$. Le r -ième espace vectoriel de notre suite est alors : $\llbracket L \rrbracket^r := \bigoplus_{|\alpha|=r} V_\alpha(L)$. En posant $\llbracket L \rrbracket := \bigoplus_r \llbracket L \rrbracket^r$, on peut définir $\mathcal{C}(L) := \llbracket L \rrbracket[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}$.

Définition 1.2.2. La caractéristique d'Euler graduée d'un complexe de chaînes \mathcal{C} est la somme alternée des dimensions graduées de ses groupes d'homologie.

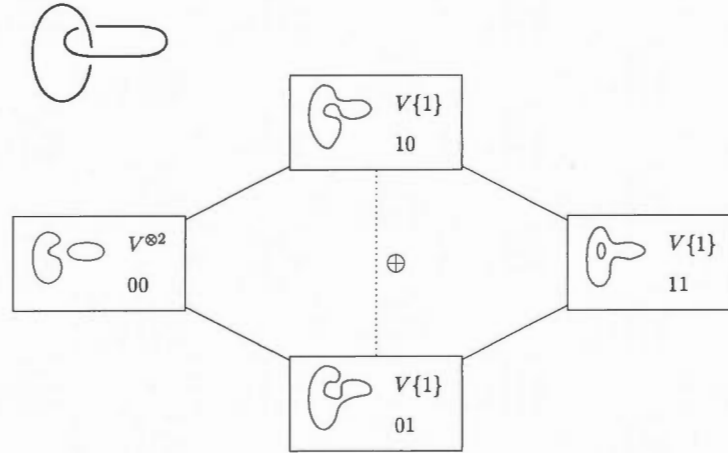


Figure 1.3 Espaces vectoriels du complexe de chaînes pour l'entrelacs de Hopf

Remarque 1.2.2. Si on a que la différentielle du complexe de chaînes est de degré 0 et que les groupes de chaînes sont de dimension finie, alors la caractéristique d'Euler est égale à la somme alternée des dimensions graduées des groupes du complexe de chaînes.

Théorème 1.2.1. *La caractéristique d'Euler graduée de $\mathcal{C}(L)$ est le polynôme de Jones non normalisé de L :*

$$\chi_q(\mathcal{C}(L)) = \hat{J}(L).$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat, nous devons d'abord supposer que la différentielle de notre complexe de chaînes sera de degré 0. Pour ce qui est de la preuve, il faut tout d'abord voir la construction de $\hat{J}(L)$ à partir d'un cube de résolution (Bar-Natan, 2002). On vérifie ensuite que $\chi_q(\mathcal{C}(K_0)) = q + q^{-1}$. Pour la suite, on regarde les effets du décalage, du changement de degré et de l'opération de tensorisation sur la dimension graduée de nos espaces vectoriels. L'opération de tensoriser notre espace r fois équivaut à multiplier notre caractéristique d'Euler par $(q + q^{-1})^r$. De plus, faire l'opération $\cdot\{r\}$ sur un espace vectoriel change sa dimension graduée par une multiplication par q^r . Pour ce qui est de $\cdot[r]$, cela change la caractéristique d'Euler graduée en la multipliant par $(-1)^r$. Alors, par construction, on a que $\chi_q(\mathcal{C}(L)) = \hat{J}(L)$. \square

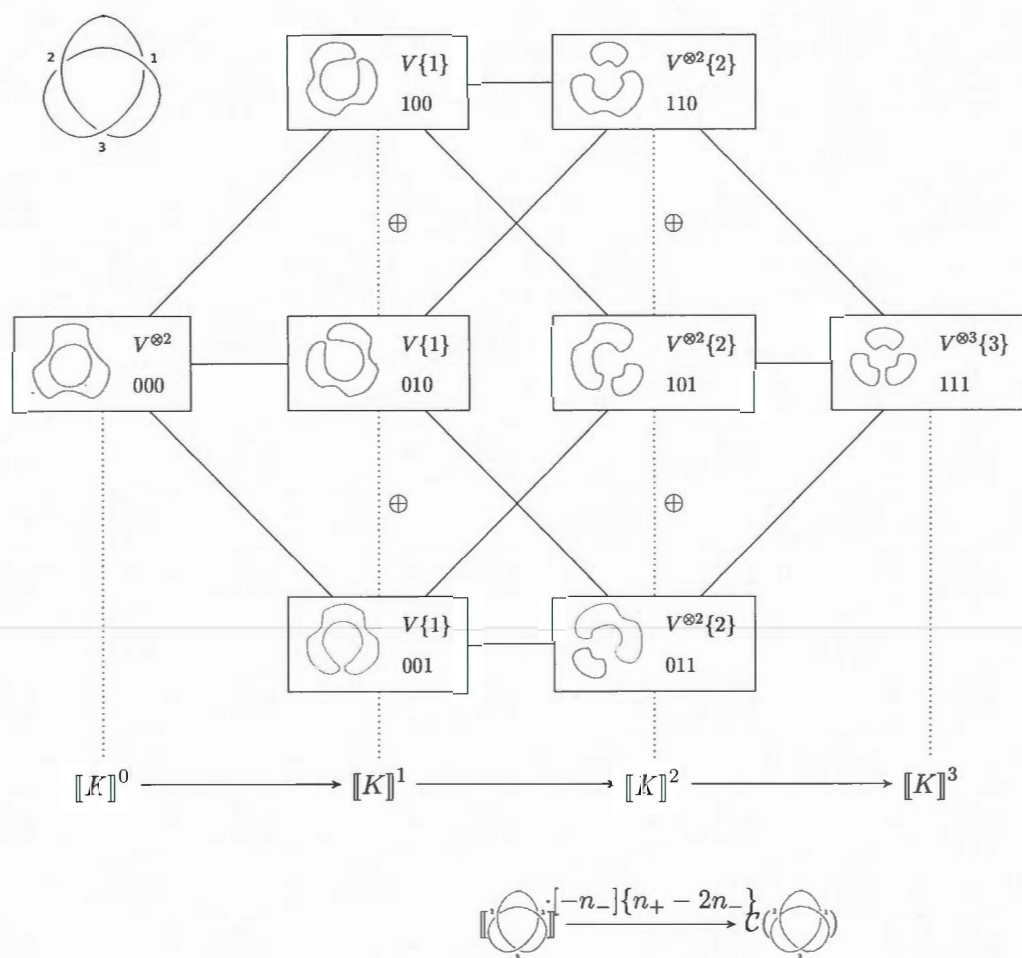
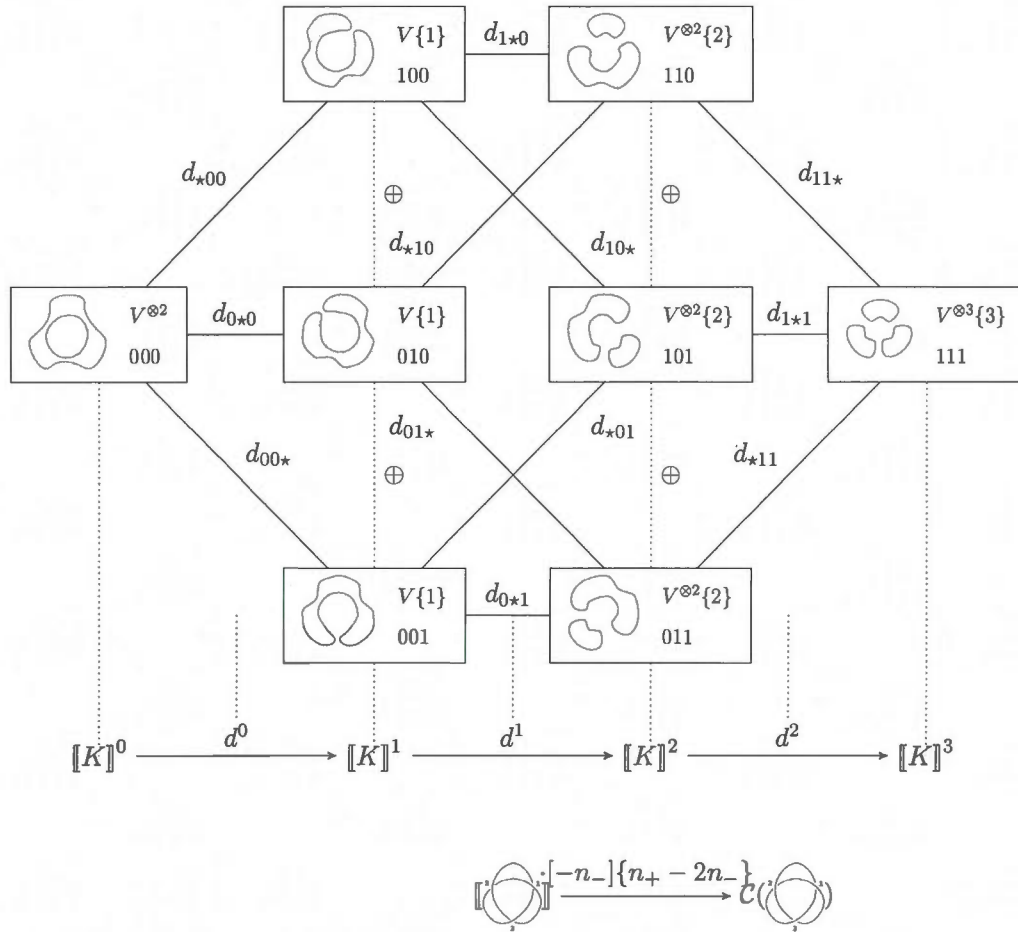


Figure 1.4 Calcul du complexe de Khovanov du noeud trèfle avec les cubes de résolutions.

1.3 La définition de la différentielle

Dans cette section, nous définirons l'application différentielle pour que nous ayons un complexe de chaînes. Pour ce faire, nous aurons besoin de deux applications linéaires ; une opération de fusion $m : V \otimes V \rightarrow V$ et une opération de séparation $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$.



Comme nous l'avons vu précédemment, les espaces $[L]^r$ sont la somme directe d'espaces vectoriels. Nous procéderons de façon analogue pour définir notre différentielle. Nous commencerons donc par étiqueter les arêtes de notre cube par des mots dans $\{0, 1, \star\}^n$ avec exactement une \star et où n est le nombre de croisements du noeud. On effectue cet

étiquetage de façon à ce que notre \star représente la composante de notre sommet dont le 0 devient un 1.

Définition 1.3.1. On appelle le poids d'une arête ξ , noté $|\xi|$, la somme de tous les 1 précédant \star dans ξ . Par exemple, si $\xi = d_{1\star 0}$ alors $|\xi| = 1$.

On remarque d'abord que le nombre de cercles dans des états qui sont liés par une arête varie de 1. Nous pouvons donc voir un morphisme entre deux états comme étant soit la fusion de deux cercles, soit la séparation de deux d'entre eux. Nous allons donc définir une opération de fusion et une opération de séparation.

Définition 1.3.2. On appelle $m : V \otimes V \xrightarrow{\infty} V$ l'opération de fusion et $\Delta : V \xrightarrow{\infty} V \otimes V$ l'opération de séparation :

$$m := \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow v_+ & v_- \otimes v_+ \rightarrow v_- \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow v_- & v_- \otimes v_- \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\Delta := \begin{cases} v_+ \rightarrow v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \rightarrow v_- \otimes v_- \end{cases}$$

Remarque 1.3.1. Nous pouvons voir que les applications m et Δ sont des opérateurs de degré -1 . Mais étant donné que les espaces du complexe de chaînes subissent un changement de degré pour chaque croisement résolu par l'opération 1-lisse, nous avons que m et Δ seront de degré 0 dans notre n -cube. De plus, nous pouvons noter que m et Δ sont respectivement commutative et co-commutative. Cela est essentiel pour la définition du complexe de chaînes, car nous voudrions avoir des faces anticommutatives.

Il reste un détail important pour faire en sorte que nous ayons véritablement un complexe de chaînes. La composition de deux différentielles doit s'annuler. Pour ce faire, il faut voir que chacune des faces du n -cube est anticommutative. Nous devons multiplier certaines des différentielles par -1 . Pour avoir l'anticommutativité recherchée, il faudra alors qu'il y ait un nombre impair d'arêtes négatives dans chaque face. Nous multiplions alors

chaque différentielle par $(-1)^\xi := (-1)^{\sum_{i < j} \xi_i}$, où ξ est le nom de la flèche et j est la position de \star dans ξ . Nous avons maintenant toutes les notions nécessaires pour introduire la différentielle dans notre suite d'espaces vectoriels.

Définition 1.3.3. Soit $\llbracket L \rrbracket$ une suite d'espaces vectoriels. On définit $d^r := \sum_{\xi} (-1)^\xi d_{\xi}$ où les ξ sont les étiquettes des arêtes allant de $\llbracket L \rrbracket^r$ et d_{ξ} représente soit l'opération de fusion ou celle de séparation.

L'anticommutativité de chacune des faces implique que la composition des différentielles nous donne bien 0. De plus, nous avons que puisque la différentielle est une composition d'opérateurs de degré 0, elle est de degré 0. Alors, par le théorème 1.2.1, nous avons que la caractéristique d'Euler associée à notre complexe de chaînes est le polynôme de Jones non-normalisé de l'entrelacs.

Remarque 1.3.2. De façon analogue au fait qu'il est possible de calculer le polynôme de Jones de manière purement algorithmique à l'aide du crochet de Kauffman, il est possible de calculer notre complexe de chaînes à l'aide d'un algorithme simple.

Rappelons d'abord l'algorithme pour calculer le polynôme de Jones d'un entrelacs L grâce au crochet de Kauffman (Kauffman, 1988)

$$\langle \emptyset \rangle = 1; \quad \langle \bigcirc L \rangle = (q + q^{-1}) \langle L \rangle; \quad \langle \times \rangle = \langle \smile \rangle - q \langle \frown \rangle.$$

De façon analogue, on peut montrer (voir (Bar-Natan, 2002)) que le calcul de l'homologie de Khovanov est donné par l'algorithme suivant :

$$\llbracket \emptyset \rrbracket = 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0; \quad \llbracket \bigcirc L \rrbracket = V \otimes \llbracket L \rrbracket; \quad \llbracket \times \rrbracket = \mathcal{F}(0 \rightarrow \smile \xrightarrow{d} \frown \rightarrow 0).$$

Ici, nous avons que \mathcal{F} est un opérateur d'applatissage qui associe à un double complexe de chaînes un complexe de chaînes en faisant la somme directe sur les diagonales. Par contre, nous savons que le polynôme de Jones est une petite renormalisation du crochet de Kauffman donnée par $\widehat{J}(L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle L \rangle$. Cette renormalisation se transpose de la façon suivante pour l'homologie de Khovanov : $\mathcal{C}(L) := \llbracket L \rrbracket[n_-] \{n_+ - 2n_-\}$. Nous obtenons donc facilement le complexe de chaînes qui donne l'homologie de Khovanov.

1.4 L'invariance topologique

Dans la section précédente, nous avons prouvé que l'on pouvait retrouver le polynôme de Jones à partir de l'homologie de Khovanov. Notre but est maintenant de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.4.1. *L'homologie de Khovanov est un invariant topologique pour les noeuds.*

Grâce à ce théorème, nous savons que si deux projections de noeuds ont des homologies de Khovanov distinctes, alors il n'existe pas d'isotopie entre les deux noeuds. Par contre, l'homologie de Khovanov n'est pas un invariant complet. C'est-à-dire que si deux noeuds ont la même homologie, ils ne sont pas nécessairement isotopes l'un à l'autre. Cela sera démontré dans la section 1.5.

Remarque 1.4.1. L'une des grandes questions non résolues à propos du polynôme de Jones est de savoir si celui-ci peut identifier le noeud trivial. À ce jour, il n'y a aucun exemple de noeud non-trivial ayant un polynôme de Jones trivial. Toutefois il n'y a aucun résultat général permettant de prouver que le polynôme de Jones puisse identifier le noeud trivial. Par contre, l'un des résultats très profonds provenant de la théorie de l'homologie de Floer des instantons est le fait que l'homologie de Khovanov détecte le noeud trivial. C'est-à-dire que si K est un noeud dont l'homologie de Khovanov est triviale, alors K est isotope au noeud trivial.

Il est légitime de se demander si l'homologie de Khovanov est un invariant plus puissant que le polynôme de Jones. Y a-t-il des noeuds pouvant être différenciés par leur homologie, mais qui aient le même polynôme de Jones ? Nous verrons plus tard que de tels noeuds existent et nous en verrons un exemple.

Nous allons maintenant nous attaquer à l'invariance de l'homologie à isotopie près.

Définition 1.4.1. Soit $\mathcal{H}^r(L)$ le r -ième groupe de cohomologie du complexe $\mathcal{C}(L)$

Nous savons que $\mathcal{H}^r(L)$ est un espace vectoriel gradué qui dépend de la projection de notre entrelacs L .

Définition 1.4.2. Soit $\text{Kh}(L)$ le polynôme de Poincaré gradué du complexe $\mathcal{C}(L)$ en la variable t . Ce polynôme est donc représenté par la formule suivante :

$$\text{Kh}(L) := \sum_r t^r q^{\dim \mathcal{H}^r(L)}$$

Théorème 1.4.2. La dimension graduée des groupes d'homologies $\mathcal{H}^r(L)$ est un invariant d'entrelacs. Donc $\text{Kh}(L)$, qui est un polynôme en t et q , est un invariant d'entrelacs. De plus, on retrouve le polynôme de Jones lorsque nous évaluons $\text{Kh}(L)$ en $t = -1$.

L'idée de la preuve de ce théorème est relativement simple. En effet, pour voir que nous avons un invariant d'entrelacs, il suffit de s'assurer que les groupes d'homologie sont invariants sous les mouvements de Reidemeister.

Avant de prouver le théorème principal de ce chapitre, nous aurons besoin de quelques notions de base sur les complexes de chaînes :

Définition 1.4.3. Un sous-complexe de chaînes \mathcal{D} est un complexe de chaînes tel que $\mathcal{D}^r \subset \mathcal{C}^r \forall r \in \mathbb{N}$. On le note $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$.

Définition 1.4.4. Un complexe de chaînes \mathcal{C} est dit acyclique s'il n'a pas d'homologie. i.e. nous avons que $H^r(\mathcal{C}) = 0 \forall r \in \mathbb{N}$.

Lemme 1.4.1. Soit \mathcal{C} un complexe de chaînes et soit $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ un sous-complexe de chaînes.

(1) Si \mathcal{C}' est acyclique, nous avons que $H(\mathcal{C}) \cong H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$.

(2) De même, si \mathcal{C}/\mathcal{C}' est acyclique, on a que $H(\mathcal{C}) \cong H(\mathcal{C}')$.

Démonstration. Soit $0 \rightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{C}/\mathcal{C}' \rightarrow 0$ une suite exacte de complexes de chaînes. Nous avons alors la suite exacte longue d'homologie associée

$$\dots \rightarrow H^r(\mathcal{C}') \rightarrow H^r(\mathcal{C}) \rightarrow H^r(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \rightarrow H^{r+1}(\mathcal{C}') \rightarrow \dots$$

Si \mathcal{C}' est acyclique, alors la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H^r(\mathcal{C}) \rightarrow H^r(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

nous donne directement l'isomorphisme recherché.

De manière analogue, si \mathcal{C}/\mathcal{C}' est acyclique, alors la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow H^r(\mathcal{C}') \rightarrow H^r(\mathcal{C}) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

nous donne l'autre isomorphisme.

□

Un fait qu'il peut être intéressant de noter est que l'opérateur de fusion m peut être vu comme étant une multiplication. Nous avons alors que l'unité pour cette multiplication est donnée par v_+ . De même, nous avons que Δ est une comultiplication ayant pour counité $\epsilon \in V^*$ définie par $\epsilon(v_+) = 0$ et $\epsilon(v_-) = 1$.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour faire la preuve que l'homologie de Khovanov est un invariant d'entrelacs.

Démonstration. Il s'agit d'une preuve tirée de (Bar-Natan, 2002). Pour cette preuve, nous utiliserons davantage l'approche algorithmique équivalente au cube de résolution présentée à la fin de la section précédente.

Invariance sous le premier mouvement de Reidemeister

Soit $\mathcal{H}(\mathcal{Q})$ l'homologie d'un entrelacs avec un twist. Pour calculer son complexe de chaînes, nous rencontrons le complexe suivant :

$$\mathcal{C} = [\![\mathcal{Q}]\!] = \mathcal{F}([\![\text{cercle}]\!] \xrightarrow{m} [\![\text{crescent}\{1\}]\!]).$$

Les objets dans le complexe précédent sont bien entendu des complexes de chaînes avec l'opération d'applatissage présentée plus tôt. Ce complexe possède un sous-complexe naturel donné par

$$\mathcal{C}' := ([\![\text{cercle}]\!]_{v_+} \xrightarrow{m} [\![\text{crescent}\{1\}]\!])$$

où $[\![\text{cercle}]\!]_{v_+}^r$ est le sous-espace vectoriel de la r -ième composante de $[\![\text{cercle}]\!]$ dans lequel le cercle créé est associé à l'espace vectoriel engendré par v_+ .

Comme v_+ est l'élément neutre pour la multiplication m , nous avons que \mathcal{C}' est acyclique. En effet, soit $v_+ \otimes a \in \llbracket \text{---} \circ \text{---} \rrbracket_{v_+}$, alors $m(v_+ \otimes a) = a$. Nous avons donc que m restreint à $\llbracket \text{---} \circ \text{---} \rrbracket_{v_+}$ est un isomorphisme. Nous en concluons alors que \mathcal{C}' est acyclique. Alors par le lemme 1.4.1, nous en concluons que $H(\mathcal{C}/\mathcal{C}') \cong H(\mathcal{C})$.

Nous avons maintenant simplifié le problème à l'étude de l'homologie du complexe \mathcal{C}/\mathcal{C}' pour connaître \mathcal{C} . Le complexe quotient est donc :

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}' = (\llbracket \text{---} \circ \text{---} \rrbracket_{v_+=0} \rightarrow 0)$$

où $v_+=0$ signifie modulo v_+ pour le cercle choisi. Nous avons donc que $V/(v_+ = 0)$ est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par v_- . Nous avons donc que $\llbracket \text{---} \circ \text{---} \rrbracket_{v_+}$ est isomorphe à $\llbracket \text{---} \text{---} \rrbracket$, à changement de degré près. En effet, puisqu'un élément de $\llbracket \text{---} \circ \text{---} \rrbracket_{v_+}$ est de la forme $v_- \otimes a$ et qu'un élément de $\llbracket \text{---} \text{---} \rrbracket$ est de la forme a , $a \in \{v_-, v_+\}$, nous avons que la différence des degrés est de 1. Puisque dans le premier cas nous avons ajouté un croisement positif et aucun croisement négatif, alors nous obtenons que le changement de degré $[n_-]\{n_+ - 2n_-\}$ dans la définition de $\mathcal{C}(L)$ annule cette différence. Nous avons donc l'invariance sous le premier mouvement de Reidemeister.

Invariance sous le second mouvement de Reidemeister

Calculons maintenant $\mathcal{H}(\text{---} \times \text{---})$. Pour ce faire, nous rencontrons nécessairement le complexe \mathcal{C} de la figure 1.5. Ce complexe possède un sous-complexe \mathcal{C}' . Encore une fois, ce sous-complexe est acyclique et nous pouvons alors étudier le complexe quotient \mathcal{C}/\mathcal{C}' .

Nous pouvons constater que Δ est un isomorphisme dans le diagramme de \mathcal{C}/\mathcal{C}' . Considérons donc l'opération $\tau := d_{\star 0} \Delta^{-1}$. Posons \mathcal{C}'' le sous-complexe de \mathcal{C}/\mathcal{C}' qui contient l'ensemble des $\alpha \in \llbracket \text{---} \times \text{---} \rrbracket$ ainsi que de toutes les paires $(\beta, \tau\beta) \in \llbracket \text{---} \circ \text{---} \rrbracket_{v_+} \oplus \llbracket \text{---} \times \text{---} \rrbracket \{1\}$. Puisque Δ est un isomorphisme, alors nous avons que \mathcal{C}'' est acyclique. Nous avons donc que $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}') = H((\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'')$.

Analysons maintenant le nouveau complexe quotient $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$. Dans ce quotient, nous avons que le coin inférieur gauche est 0, mais il est un peu plus difficile de comprendre ce qu'il reste dans le coin supérieur gauche et dans le coin inférieur droit. Pour mieux

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc}
\mathbb{D} \circ \mathbb{C} \{1\} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C} \{2\} \\
\uparrow \Delta & \mathcal{C} & \uparrow \\
\mathbb{C} \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \{1\}
\end{array} & \supset & \begin{array}{ccc}
\mathbb{D} \circ \mathbb{C}_{v_+} \{1\} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C} \{2\} \\
\uparrow & \mathcal{C}' & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & 0
\end{array} \\
\\
\begin{array}{ccc}
\mathbb{D} \circ \mathbb{C}_{v_+} \{1\} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \Delta & \mathcal{C}/\mathcal{C}' & \uparrow \\
\mathbb{C} \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \{1\}
\end{array} & \supset & \begin{array}{ccc}
\{\beta \in \mathbb{D} \circ \mathbb{C}_{v_+}\} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow \Delta & \mathcal{C}'' & \uparrow \\
\{\alpha \in \mathbb{C} \{1\}\} & \xrightarrow{d_{*0}} & \{\tau\beta\}
\end{array} \\
\\
& & \begin{array}{ccc}
\{\beta\} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & (\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'' & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \{\gamma\}
\end{array}
\end{array}$$

Figure 1.5 Complexes de chaînes pour l'invariance sous R2

comprendre, nous devons regarder la relation d'équivalence introduite par le quotient. Nous voyons que les couples de la forme $(\beta, \tau\beta)$ sont annulés par notre quotient. Lorsque nous faisons la somme directe, nous avons donc que $(\beta, 0) = (0, \tau\beta)$. Cela implique que lorsque nous regardons un élément de la somme directe, en l'occurrence un élément de la forme $\beta + \gamma$, nous obtenons que c'est la même chose que $\tau\beta + \gamma$. Nous avons donc un isomorphisme avec le complexe ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & \mathcal{C}''' & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \{1\}
\end{array}$$

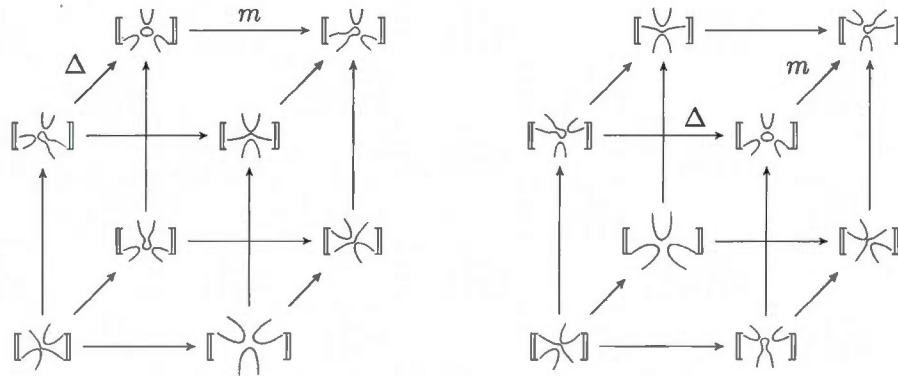
Ce complexe, que nous appellerons \mathcal{C}''' , est un sous-complexe de \mathcal{C}/\mathcal{C}' . Le complexe quotient $(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}'''$ nous donne alors :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D} \circ \mathbb{C} /_{v_+} \{1\} & \longrightarrow & 0 \\
\Delta' \uparrow & (C/C')/C''' & \uparrow \\
\mathbb{D} \circ \mathbb{C} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Nous pouvons donc facilement voir que Δ' est un isomorphisme, d'où le fait que ce complexe est acyclique. Cela implique donc que $H(C''') = H(C/C') = H(C)$. Or, le complexe C'' est simplement $\mathbb{D} \circ \mathbb{C}$ à changement de degré près. Puisque le second mouvement de Reidemeister ajoute un croisement positif ainsi qu'un croisement négatif, nous avons que $[n_-]\{n_+ - 2n_-\} = [-1]\{-1\}$ annule ce changement de degré. Nous avons donc l'isomorphisme recherché.

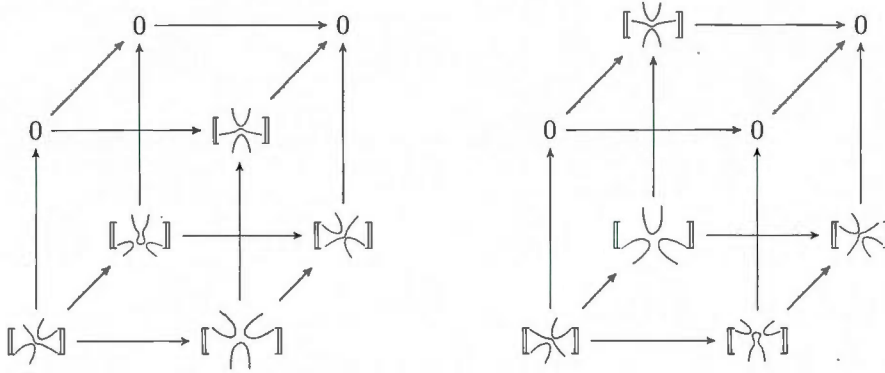
Invariance sous le troisième mouvement de Reidemeister

Pour ce dernier mouvement de Reidemeister, nous allons étudier les résolutions de $\mathbb{D} \circ \mathbb{C}$ et de $\mathbb{D} \circ \mathbb{C}$. Nous obtenons alors les diagrammes suivants :

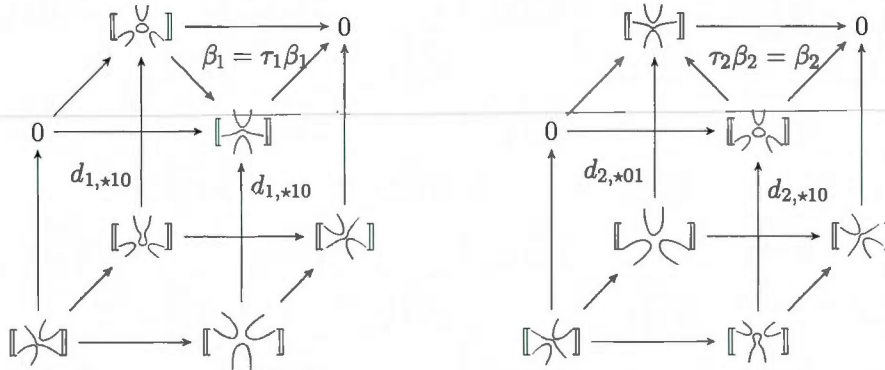


Les carrés du bas représentent les résolutions de $\mathbb{D} \circ \mathbb{C}$ et de $\mathbb{D} \circ \mathbb{C}$. Ils sont donc isomorphes. Les carrés du haut représentent $\mathbb{D} \circ \mathbb{C}$ et $\mathbb{D} \circ \mathbb{C}$, mais nous ne pouvons pas dire que les deux diagrammes sont isomorphes puisque les morphismes verticaux ne sont pas équivalents. Pour la partie du haut, nous allons utiliser les sous-complexes C' et C'' introduits dans la deuxième partie de la preuve. Les diagrammes suivants sont donc

acycliques :



Par le lemme 1.4.1, nous avons donc que les cubes quotients suivants ont la même homologie :



Les deux diagrammes que nous obtenons sont alors isomorphes. Pour prouver cette affirmation, posons Γ l'application qui est l'identité sur la ligne du bas et qui permute les paires du haut. Nous avons donc que $\Gamma(\beta_1, \gamma_1) = (\gamma_1, \beta_1)$ et que Γ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Il ne reste plus qu'à montrer que Γ est un isomorphisme de complexes de chaînes. Pour ce faire, il suffit de voir que $\tau_1 \circ d_{1,*01} = d_{2,*01}$ et que $d_{1,*10} = \tau_2 \circ d_{2,*10}$. Nous avons donc que les deux homologies sont isomorphes, ce qui conclut la preuve de l'invariance de l'homologie de Khovanov sous isotopies.

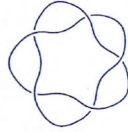
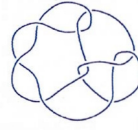


1.5 Quelques remarques sur l'homologie de Khovanov

Nous allons maintenant donner plusieurs raisons qui font que l'homologie de Khovanov est intéressante à étudier. La première mise au point qui sera faite ici est la notion de catégorification. En effet, il est souvent possible de lire dans la littérature que l'homologie de Khovanov est une catégorification du polynôme de Jones. Une question qui est alors légitime de se poser est : Qu'est-ce qu'une catégorification ?

L'idée de base d'une catégorification est de remplacer les ensembles de départ par des catégories et les applications par des foncteurs. Nous obtenons ainsi une théorie beaucoup plus riche. Il existe alors une opération inverse que l'on appelle la décatégorification qui permet de passer d'une catégorie à un ensemble et de foncteurs à des fonctions. Les isomorphismes obtenus entre les objets sont alors des égalités dans les ensembles. Dans le cas de l'homologie de Khovanov, l'idée est de généraliser le polynôme de Jones en remplaçant les polynômes par une suite d'espace vectoriel et de calculer son homologie. Dès lors, on peut voir la caractéristique d'Euler graduée comme étant l'opération de décatégorification. Évidemment, si deux homologies sont isomorphes, alors elles auront forcément le même polynôme de Jones.

Maintenant, il est important de justifier l'utilité de faire une telle opération. Gagne-t-on quelque chose en étudiant le problème avec des objets plus généraux ? Dans notre cas, nous obtenons un invariant plus puissant. En effet, certains noeuds ont des polynômes de Jones égaux, mais possèdent des homologies de Khovanov différentes. On en trouve des exemples dans la table de l'article de Bar-Natan (Bar-Natan, 2002). Prenons l'exemple des deux noeuds suivant :

 5_1  10_{132}

Le polynôme de Poincaré du noeud 5_1 est

$$\text{Kh}(5_1) = q^{-15}t^{-5} + q^{-11}t^{-4} + q^{-11}t^{-3} + q^{-7}t^{-2} + q^{-5} + q^{-3},$$

tandis que celui du noeud 10_{132} est

$$\begin{aligned} \text{Kh}(10_{132}) = & q^{-15}t^{-7} + q^{-11}t^{-6} + q^{-11}t^{-5} + (q^{-7} + q^{-9})t^{-4} \\ & + (q^{-5} + q^{-9})t^{-3} + 2q^{-5}t^{-2} + q^{-1}t^{-1} + q^{-1} + q^{-3}. \end{aligned}$$

Cela montre que l'homologie de Khovanov de ces deux noeuds est différente. Cependant, si nous posons $t = -1$ dans les polynômes de Poincaré, nous obtenons les polynômes de Jones de chacun de ces deux noeuds. Or nous avons que

$$\text{Kh}(5_1)_{t=-1} = -q^{-15} + q^{-7} + q^{-5} + q^{-3}$$

$$\text{Kh}(10_{132})_{t=-1} = -q^{-15} + q^{-7} + q^{-5} + q^{-3}$$

ce qui montre que l'homologie de Khovanov est un invariant plus puissant que le polynôme de Jones.

Pour terminer ce chapitre, nous parlerons d'un résultat très puissant qui a été prouvé par Kronheimer et Mrowka en 2010. L'une des questions importantes propos du polynôme de Jones est de savoir si celui-ci peut repérer le noeud trivial. Cette question se posait aussi pour l'homologie de Khovanov au début des années 2000. Il a été prouvé dans (Kronheimer et Mrowka, 2011) que l'homologie de Khovanov était un détecteur du noeud trivial. Il s'agit d'une preuve très riche faisant appel à l'homologie des instantons.

CHAPITRE II

LES COBORDISMES

Nous avons vu précédemment que l'homologie de Khovanov était une catégorification du polynôme de Jones. Ce polynôme peut alors être retrouvé dans la théorie homologique en calculant la caractéristique d'Euler graduée. De plus, nous savons que cet invariant est strictement plus puissant que le polynôme de Jones. Par contre, l'une des propriétés encore plus intéressante de cette théorie est le fait que l'homologie est un foncteur. Cela implique que des applications continues entre les espaces induisent des morphismes en homologie. La fonctorialité est une pierre angulaire de la théorie homologique, c'est l'une des raisons qui a poussé les topologues à étudier l'homologie à ses débuts. Nous verrons donc dans ce chapitre une théorie sur les cobordismes entre les enchevêtrements ("tangle" en anglais) qui nous permettra de développer de manière équivalente l'homologie de Khovanov.

2.1 Cobordismes et enchevêtrements

Dans cette section, nous développerons la théorie des cobordismes et d'enchevêtrements pour un noeud. Le principe sera très similaire à celui des cubes de résolutions vu lors du premier chapitre, cependant nous changerons la définition des morphismes entre les sommets. Pour bien comprendre les changements, nous définirons d'abord les notions dont il est ici question.

Définition 2.1.1. Soit L un diagramme d'entrelacs. On dit que T est un enchevêtrement de L si $T \subset L$ est une partie du diagramme de notre entrelacs tel que ∂T est un ensemble

fini de points sur le bord d'un disque.

Exemple 2.1.1. Voici l'exemple d'un enchevêtrement :



Il est important de noter que pour un noeud choisi, il est possible de prendre un ensemble d'enchevêtrements de telle sorte qu'une arête dans le cube de résolution ne modifie qu'un enchevêtrement à la fois. La question qu'il faut alors se poser est comment agit une arête sur les sommets de notre cube. En fait, nous construirons des surfaces ayant pour bords nos différents sommets et nous les considérerons comme des morphismes.

Définition 2.1.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ une surface. On dit que S est un cobordisme entre deux diagrammes d'entrelacs S_0 et S_1 si S est une surface ayant pour bord nos deux enchevêtrements.

Nous avons défini une surface entre chacun des sommets du cube de résolutions. Nous remplaçons alors les différentielles du cube par des cobordismes qui vont d'une résolution à l'autre. Lorsque nous regardons le cobordisme d'un enchevêtrement, nous obtenons alors un cylindre sur lequel nous avons des droites verticales.

Exemple 2.1.2. Voici un cobordisme allant de  vers 



Nous avons réussi à recréer un cube de résolutions de façon similaire à celle vue dans le premier chapitre. Nous donnerons aussi un signe à chacune des arêtes. Pour ce faire, nous procéderons de manière similaire à celle du produit extérieur. En effet, nous posons l'ordre naturel sur les croisements c_1, \dots, c_n . Nous considérons alors que le signe des arêtes est donné par la multiplication extérieure par dc_i où c_i est le croisement modifié

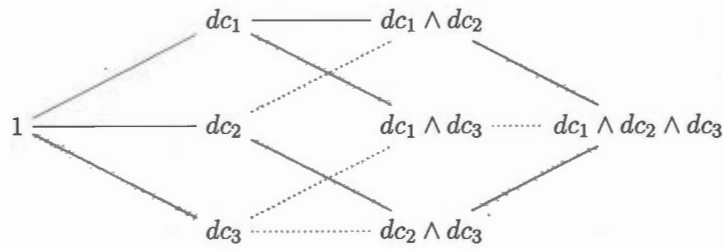


Figure 2.1 Règle pour les signes dans le cubes

par l'arête. On peut observer ce que cela donne à la figure 2.1 où les flèches en pointillé indiquent que le signe est négatif.

Calculer l'homologie d'un tel cube de résolution n'a cependant aucun sens pour l'instant. Nous devons faire en sorte d'interpréter ce cube comme un complexe de chaînes $[[L]]$ en pensant aux résolutions comme à des espaces vectoriels et en considérant les cobordismes comme des différentielles. Pour ce faire, nous devons utiliser des notions d'algèbre homologique.

2.2 La catégorie des cobordismes

La première étape consiste à créer une catégorie ayant pour objets les résolutions de nos entrelacs et où les morphismes sont des cobordismes entre ceux-ci. Le but de cette section est de définir une telle catégorie et de présenter quelques unes de ses propriétés intéressantes.

Définition 2.2.1. Soit $\text{Cob}(\emptyset)$ la catégorie ayant pour objet des courbes simples dans le plan et dont les morphismes sont des classes d'équivalences de cobordismes entre deux courbes. Deux cobordismes sont équivalents s'il existe une isotopie entre les deux qui préserve les courbes simples.

La composition des morphismes est correspond à leur recollement. On peut en voir un exemple à la figure 2.2

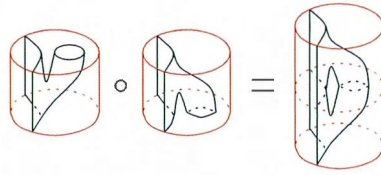
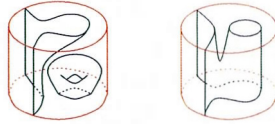






Figure 2.2 Composition des cobordismes

Si B est un ensemble fini de points sur un cercle, comme le bord ∂T d'un enchevêtrement T , alors on a que $\text{Cob}^3(B)$ est la catégorie qui a pour objet les courbes simples avec bord B et où les morphismes sont des cobordismes d'enchevêtrements vu à la section précédente.

Exemple 2.2.1. Voici deux morphismes de $\text{Cob}^3(B)$ où B est une ensemble à 2 éléments :



Le premier morphisme va de  vers .

Le second morphisme va de  vers .

Remarque 2.2.1. Un abus de notation commun dans la littérature est d'écrire Cob^3 aussi bien pour $\text{Cob}^3(\emptyset)$ que pour $\text{Cob}^3(B)$. Nous utiliserons ici cet abus de langage.

Afin de pouvoir parler d'une théorie homologique sur notre catégorie, nous devons tout d'abord faire en sorte que cette catégorie ait certaines propriétés désirées.

Définition 2.2.2. Une catégorie \mathcal{C} est dite préadditive si elle possède un objet 0 , l'ensemble des morphismes forme un groupe abélien et si la composition de morphismes est bilinéaire.

Définition 2.2.3. Soit \mathcal{C} une catégorie préadditive. On peut définir la fermeture additive de \mathcal{C} , notée $\text{Mat}(\mathcal{C})$, de la manière suivante :

- (1) Les objets $\text{Mat}(\mathcal{C})$ sont de sommes directes $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_i$, où $\mathcal{O}_i \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.
- (2) Soient $\mathcal{O} := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ et $\mathcal{O}' := \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{O}'_j$, alors un morphisme $\mathcal{F} : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ de $\text{Mat}(\mathcal{C})$ sera une matrice $n \times m$ $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij})$ de morphismes $\mathcal{F}_{ij} : \mathcal{O}'_j \rightarrow \mathcal{O}_i$ dans \mathcal{C} .
- (3) Les morphismes de $\text{Mat}(\mathcal{C})$ peuvent être sommés par l'addition usuelle de matrices.
- (4) La composition de morphismes de $\text{Mat}(\mathcal{C})$ agit comme la multiplication de matrices.

Exemple 2.2.2. La catégorie des modules est additive puisqu'elle contient les sommes directes finies et les produits directs.

Si nous prenons un noeud K , nous pouvons alors construire le cube de résolution et obtenir que $\llbracket K \rrbracket = (\cdots \rightarrow \llbracket K \rrbracket^{-3} \rightarrow \llbracket K \rrbracket^{-2} \rightarrow \llbracket K \rrbracket^{-1} \rightarrow \llbracket K \rrbracket^0 \rightarrow \cdots)$ est un élément de $\text{Mat}(\text{Cob}^3)$.

Il reste encore une propriété à établir afin de pouvoir parler d'homologie. Nous devons avoir une suite semi-exacte. Nous devons donc définir une nouvelle catégorie.

Définition 2.2.4. Soit \mathcal{C} une catégorie préadditive. Considérons $\text{Kom}(\mathcal{C})$ la catégorie des complexes de chaînes dont les termes sont des éléments de \mathcal{C}

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{r-1} \xrightarrow{d^{r-1}} \Omega^r \xrightarrow{d^r} \Omega^{r+1} \longrightarrow \cdots$$

et tels que la composition de deux morphismes satisfasse $d^r \circ d^{r-1} = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

Les morphismes $F : (\Omega_a^r, d_a) \longrightarrow (\Omega_b^r, d_b)$ font en sorte que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Omega_a^{r-1} & \xrightarrow{d_a^{r-1}} & \Omega_a^r & \xrightarrow{d_a^r} & \Omega_a^{r+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow F^{r-1} & & \downarrow F^r & & \downarrow F^{r+1} \\ \cdots & \longrightarrow & \Omega_b^{r-1} & \xrightarrow{d_b^{r-1}} & \Omega_b^r & \xrightarrow{d_b^r} & \Omega_b^{r+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

La composition de deux morphismes est la même que sur des morphismes de complexes de chaînes.

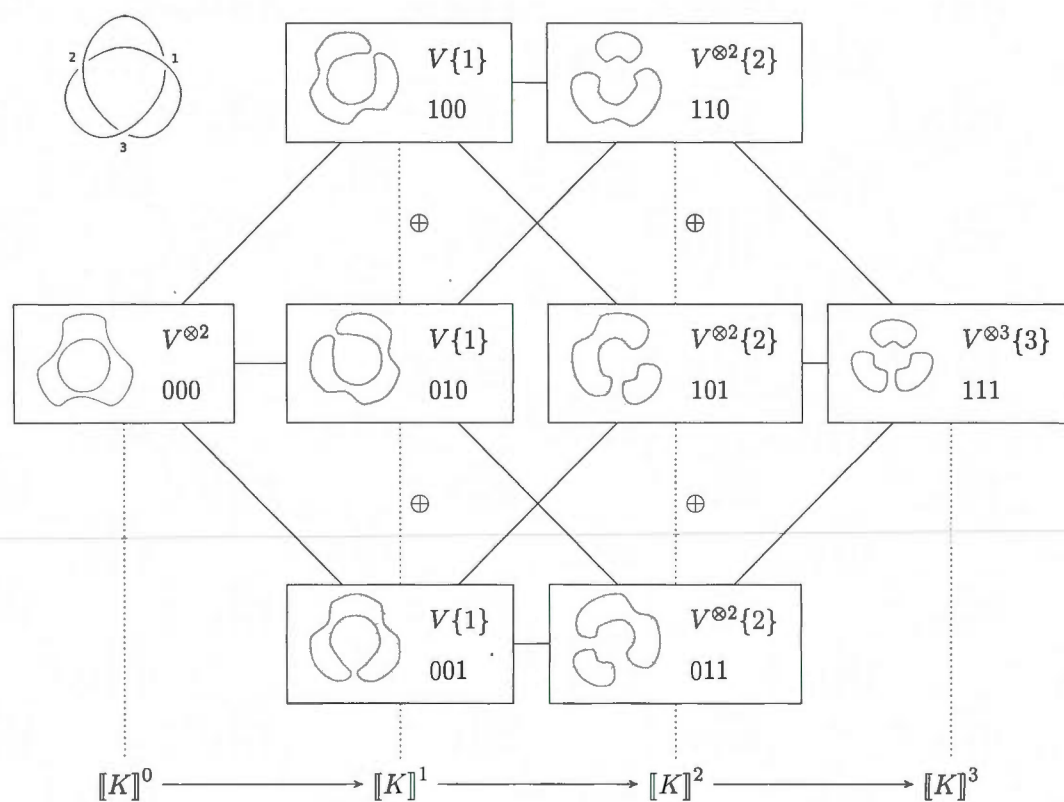


Figure 2.3 Résolution du noeud trèfle.

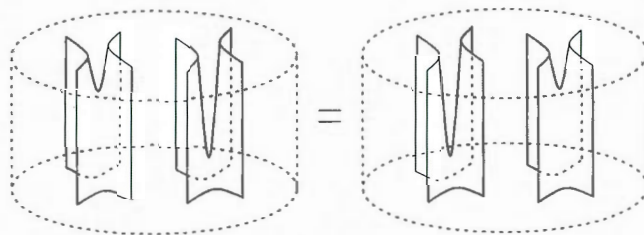


Figure 2.4 Isotopie des selles

Proposition 2.2.1. *Soit L un diagramme d'entrelacs. Nous avons que $\llbracket L \rrbracket$, défini par le cube de résolution, est un élément de $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}^3(\partial L)))$. En particulier, on a que la composition $d^r \circ d^{r-1}$ de cobordismes donnent toujours 0 dans notre cube.*

Démonstration. Étant donné le travail effectué jusqu'à maintenant, cette preuve est relativement simple. En effet, nous obtenons par construction que $\llbracket L \rrbracket$ est un complexe de chaînes dont les éléments appartiennent à la catégorie $\text{Mat}(\text{Cob}^3(\partial L))$. Il suffit alors de prouver que le cube est anticommutatif comme nous l'avons fait dans le chapitre 1. Puisque nous avons les mêmes facteurs pour les signes de notre différentielle que dans le chapitre 1, nous savons que chaque carré a un nombre impair d'arêtes négatives. Il ne reste qu'à montrer que les deux cobordismes sont les mêmes à signe près. On peut remarquer que les cobordismes entre les sommets sont des selles ou des selles renversées. On peut alors voir qu'il s'agit du même cobordisme à isotopie près, comme le montre la figure 2.4.

□

2.3 Homotopie et invariance

Jusqu'à présent, nous avons réussi à créer un complexe de chaînes formel. Par contre, ce complexe n'est pas un invariant dans la catégorie $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}^3))$. Nous devons donc considérer une nouvelle catégorie, $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_l^3))$, où Cob_l^3 est un quotient de Cob^3 . Dans cette catégorie, nous aurons alors que $\llbracket L \rrbracket$ est un invariant à isotopie près.

Définition 2.3.1. Soit \mathcal{C} une catégorie. On dit que $F, G : (\Omega_a^r) \longrightarrow (\Omega_b^r)$, des morphismes de $\text{Kom}(\mathcal{C})$, sont homotopes, s'il existe un morphisme diagonal $h^r : \Omega_a^r \longrightarrow \Omega_b^{r-1}$ tel que $F^r - G^r = h^{r+1} \circ d^r + d^{r-1} \circ h^r$ pour tout r .

Remarque 2.3.1. De façon similaire à ce que l'on peut voir en topologie algébrique, on peut prouver que l'homotopie est une relation d'équivalence. De plus, la notion d'homotopie est invariante sous la composition à gauche et à droite. C'est donc dire que si F, G sont homotopes, nous avons que $H \circ F \sim H \circ G$ et que $F \circ H \sim G \circ H$ lorsque la composition fait du sens.

Définition 2.3.2. $\text{Kom}_h(\mathcal{C})$ est la catégorie $\text{Kom}(\mathcal{C})$ modulo les homotopies. Les objets sont donc les mêmes, mais les morphismes homotopes se retrouvent dans la même classe d'équivalence.

En étudiant les objets et les morphismes de notre catégorie, nous pouvons conclure que deux objets (Ω_a^r) et (Ω_b^r) sont dits homotopiquement équivalents s'ils sont isomorphes dans $\text{Kom}_h(\mathcal{C})$. Pour que ce soit le cas, il faut alors que les compositions $F \circ G$ et $G \circ F$ soient homotopes aux flèches identité de chacun des objets.

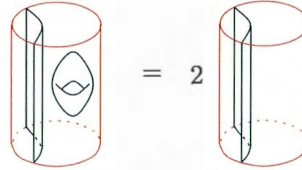
Nous allons maintenant être en mesure de définir une catégorie dans laquelle le complexe $\llbracket T \rrbracket$ est un invariant d'enchevêtrement. La seule chose qu'il nous reste à faire et de définir certaines relations dans la catégorie des cobordismes Cob^3 que nous noterons S , T et $4Tu$. Le quotient de la catégorie par ces relations sera alors noté Cob_l^3 .

La relation S dit que lorsque nous avons un cobordisme qui contient une composante connexe qui est une sphère, qui n'a donc pas de bord, alors on peut retirer la sphère et remplacer le cobordisme par 0.

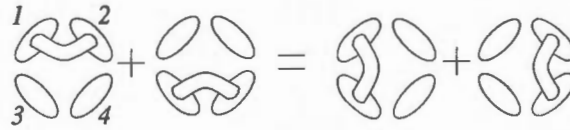
$$\text{Diagram of a sphere} = 0$$

Nous allons ensuite définir une règle établissant ce que vaut un tore dans un cobordisme. Encore une fois, nous pouvons retirer le tore du cobordisme et nous le remplaçons par

un facteur 2 qui multiplie le nouveau cobordisme. Cela a bien sûr du sens puisque nous nous trouvons dans une catégorie pré-abélienne. Nous notons cette relation T .



Finalement, il y a la relation la plus difficile à percevoir, celle que l'on nomme $4Tu$. Si on a un certain cobordisme C tel que son intersection avec une sphère est l'union de quatre disques D_1 jusqu'à D_4 , on appelle C_{ij} le cobordisme où l'on remplace D_i et D_j par un tube qui a pour bord D_i et D_j . La relation des 4 tubes est alors que $C_{12} + C_{34} = C_{13} + C_{24}$.



Remarque 2.3.2. Puisque ce ne sont que des opérations de nature locale, qui n'impliquent pas le bord de notre cobordisme, nous avons que la notion de composition de morphismes dans la catégorie demeure bien définie. Donc Cob_l est une catégorie pré-additive.

Remarque 2.3.3. Afin d'alléger la notation, pour la suite de ce chapitre, nous remplacerons la catégorie $\text{Kom}(\text{Mat}(\text{Cob}_l^3))$ par la nouvelle notation Kob . De façon similaire, nous noterons désormais par Kob_h la catégorie $\text{Kom}_h(\text{Mat}(\text{Cob}_l^3))$.

Avant de démontrer l'invariance de ce complexe de chaînes, nous introduisons quelques notions qui seront utiles au cours de la preuve.

Définition 2.3.3. Un morphisme de complexes de chaînes $G : \Omega_a \rightarrow \Omega_b$ est appelé une rétraction forte s'il existe un morphisme $F : \Omega_b \rightarrow \Omega_a$ et une homotopie $h : \Omega_a \rightarrow \Omega_a$ tels que $GF = I$, $I - FG = dh + hd$ et que $hF = 0$. On dit alors que F est une inclusion

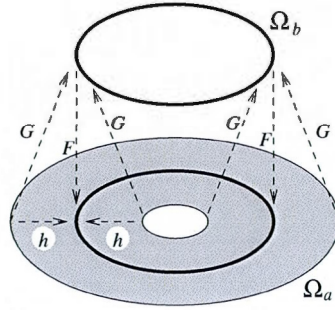


Figure 2.5 Rétraction forte

dans une rétraction forte. En particulier, on a bien sûr qu'une rétraction forte est une équivalence d'homotopie.

Nous allons aussi introduire une notion algébrique qui est très importante. Dans notre cas, elle nous permettra d'éviter de composer avec des cubes trop compliqués en utilisant une approche algébrique.

Définition 2.3.4. Soit $\Psi : (\Omega_0^r, d_0) \rightarrow (\Omega_1^r, d_1)$ un morphisme de complexe de chaînes. Le cône $\Gamma(\Psi)$ est le complexe de chaînes ayant pour espaces $\Gamma^r(\Psi) = \Omega_0^{r+1} \oplus \Omega_1^r$ et où les différentielles sont données par :

$$\tilde{d}^r := \begin{pmatrix} -d_0^{r+1} & 0 \\ \Psi^{r+1} & d_1^r \end{pmatrix}$$

Avant de prouver le théorème principal de cette section, nous prouverons deux lemmes qui nous permettront d'esquiver plusieurs calculs par la suite.

Lemme 2.3.1. $[\boxtimes] = \Gamma([\boxtimes])[-1]$ et $[\boxtimes] = \Gamma([\boxtimes])$, où \boxtimes et \boxtimes sont les morphismes de selle $\boxtimes : \boxtimes \rightarrow \boxtimes$ et $\boxtimes : \boxtimes \rightarrow \boxtimes$ et où $[-1]$ est l'opérateur de décalage définie au chapitre 1.

Lemme 2.3.2. Le cône construit précédemment est un invariant à homotopie près ainsi que sous la composition avec une inclusion dans une rétraction forte. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_{0a} & \xrightleftharpoons[F_0]{G_0} & \Omega_{0b} \\
\downarrow \Psi & & \\
\Omega_{1a} & \xrightleftharpoons[G_1]{F_1} & \Omega_{1b}
\end{array}$$

Si G_0 est une rétraction forte et que F_0 est une inclusion dans cette rétraction, alors les cônes $\Gamma(\Psi)$ et $\Gamma(\Psi F_0)$ sont homotopiquement équivalents. De plus, si F_1 est une rétraction forte avec inclusion G_1 , alors les cônes $\Gamma(\Psi)$ et $\Gamma(G_1 \Psi)$ sont homotopiquement équivalents.

Démonstration. Soit $h_0 : \Omega_{0a}^* \rightarrow \Omega_{0a}^{*-1}$ une homotopie pour laquelle $I - F_0 G_0 = d h_0 + h_0 d$ et $h_0 F_0 = 0$. Alors, le diagramme suivant de cônes définit des morphismes $\Gamma(\Psi F_0) \rightleftharpoons \Gamma(\Psi)$ et une homotopie $\tilde{h}_0 : \Gamma(\Psi)^* \rightarrow \Gamma(\Psi)^{*-1}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} \Omega_{0b}^{r+1} \\ \Omega_{1a}^{r+1} \end{pmatrix} & \xrightarrow{\tilde{d} := \begin{pmatrix} -d & 0 \\ \Psi F_0 & d \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} \Omega_{0b}^{r+2} \\ \Omega_{1a}^{r+1} \end{pmatrix} & & \\
\uparrow \tilde{F}_0^r := \begin{pmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} & \tilde{G}_0^r := \begin{pmatrix} G_0 & 0 \\ \Psi h_0 & I \end{pmatrix} & \uparrow \tilde{F}_0^{r+1} & \tilde{G}_0^{r+1} & \\
\begin{pmatrix} \Omega_{0a}^{r+1} \\ \Omega_{1a}^{r+1} \end{pmatrix} & \xrightleftharpoons[\tilde{h}_0 := \begin{pmatrix} -h_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]{\tilde{d} := \begin{pmatrix} -d & 0 \\ \Psi & d \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} \Omega_{0a}^{r+2} \\ \Omega_{1a}^{r+1} \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

En utilisant le fait que F_0 est une injection dans une rétraction forte et les propriétés des retractions fortes, on obtient que $\tilde{G}_0 \tilde{F}_0 = I$, $I - \tilde{G}_0 \tilde{F}_0 = \tilde{d} \tilde{h}_0 + \tilde{h}_0 \tilde{d}$. Cela nous donne donc que $\Gamma(\Psi F_0)$ et $\Gamma(\Psi)$ sont homotopiquement équivalents. De façon analogue, on peut montrer que $\Gamma(\Psi)$ et $\Gamma(G_1 \Psi)$ est une équivalence d'homotopie si G_1 est une inclusion de la rétraction forte F_1 . \square

Nous avons maintenant ce qu'il nous faut afin de démontrer que le complexe formel est un invariant d'enchevêtrements.

Théorème 2.3.1. *Les classes d'isomorphisme de $\llbracket T \rrbracket$ dans Kob_h sont des invariants de l'enchevêtrement T . Ceci implique donc que le complexe $\llbracket T \rrbracket$ ne dépend pas de l'ordre que nous avons fixé sur les croisements, et que c'est un invariant sous les mouvements de Reidemeister.*

Démonstration. Étudions d'abord ce qui se passe si nous changeons l'ordre que nous avons posé sur les croisements. Soit K un noeud avec n croisements et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $\{c_i\}$ l'ensemble des croisements de K . Si on change l'ordre des croisements du noeud, les nouveaux morphismes seront alors une permutation des morphismes du cube de base multiplié par le signe de la permutation σ , ce qui préserve l'anticommutativité du diagramme. Le complexe de chaînes est donc invariant sous permutation des croisements.

Invariance sous R1 :

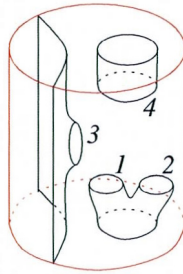
Nous allons montrer que le complexe $\llbracket \mathcal{R} \rrbracket = (0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow 0)$ est homotopiquement équivalent au complexe formel $\llbracket \mathcal{Q} \rrbracket = (0 \rightarrow \mathcal{Q} \xrightarrow{d} \mathcal{R} \rightarrow 0)$, où la différentielle est donnée par $d = \text{[diagram]}$. Nous pouvons alors construire des morphismes $F : \llbracket \mathcal{R} \rrbracket \rightarrow \llbracket \mathcal{Q} \rrbracket$ et $G : \llbracket \mathcal{Q} \rrbracket \rightarrow \llbracket \mathcal{R} \rrbracket$ qui sont des inverses homotopiques. Les morphismes sont définis comme suit :

$$F^n := \begin{cases} \text{[diagram]} - \text{[diagram]} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G^n := \begin{cases} \text{[diagram]} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étant donné la simplicité des morphismes impliqués, nous avons que la seule commutativité qu'il faut vérifier est celle de $d \circ F^0 = 0$. Cette égalité suit du fait que $\text{[diagram]} \circ \text{[diagram]} = \text{[diagram]} \circ \text{[diagram]}$, par la définition de d et la distributivité dans les catégories additives.

Considérons maintenant GF . Le seul morphisme non nul est alors $G^0 \circ F^0$. En y appliquant la relation T , on obtient que $GF = I$. Il ne reste plus qu'à montrer que $FG \sim I$. Il s'agit de l'homotopie la plus difficile à démontrer puisqu'il faut utiliser la relation des 4 tubes. Définissons d'abord un morphisme $h := \text{[diagram]} : \llbracket \mathcal{Q}^1 \rrbracket = \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q} = \llbracket \mathcal{Q}^0 \rrbracket$. On a d'abord que $F^1 G^1 - I + dh = -I + dh$. De plus, on observe que $dh = I$ et donc on a que $F^1 G^1 - I + dh = 0$. Nous aurons cependant besoin de la règle des 4 tubes pour prouver que $F^0 G^0 \sim I$. Pour voir cette homotopie, considérons le cobordisme suivant :



On peut voir que C_{12} et C_{13} correspondent aux deux composantes de $F^0 G^0$. De plus, on peut facilement voir que C_{24} est le morphisme identité, tandis que $C_{34} = hd$. Nous avons donc que $F^0 G^0 - I + hd = C_{12} - C_{13} - C_{24} + C_{34} = 0$ par le règle des 4 tubes. Nous avons donc que $FG \sim I$, ce qui implique que le complexe est invariant sous le premier mouvement de Reidemeister.

Invariance sous R2 :

La preuve de l'invariance sous le second mouvement de Reidemeister est assez similaire à celle de R1. Le diagramme à analyser est toutefois un peu plus compliqué. Comme on se souvient, on veut voir que $\llbracket \bowtie \rrbracket \sim \llbracket \bowtie \rrbracket$. Construisons d'abord les morphismes $F : \llbracket \bowtie \rrbracket \rightarrow \llbracket \bowtie \rrbracket$ ainsi que $G : \llbracket \bowtie \rrbracket \rightarrow \llbracket \bowtie \rrbracket$ que l'on peut voir dans la figure 2.6.

Nous avons alors que $\searrow : \swarrow \rightarrow \searrow$, $\swarrow : \swarrow \rightarrow \swarrow$ sont définies par le cobordisme [diagram] et son inverse. Nous avons aussi les morphismes $\square : \emptyset \rightarrow \bigcirc$ et $\otimes : \bigcirc \rightarrow \emptyset$, qui sont respectivement le haut d'une sphère et le bas d'une sphère. On peut donc facilement voir que $dF = 0$ uniquement en utilisant le fait que les cobordismes ainsi obtenus sont

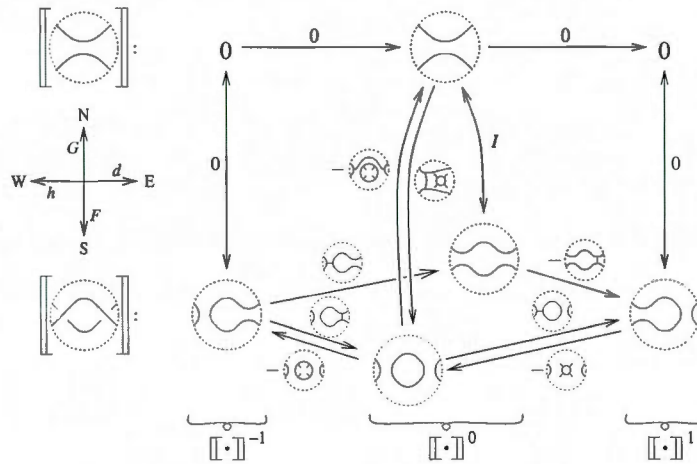


Figure 2.6 Invariance sous le deuxième mouvement de Reidemeister

isotopes. En employant un procédé similaire, on obtient que $Gd = 0$, ce qui montre la commutativité du second carré.

Pour terminer la preuve de l'invariance sous R2, il ne reste plus qu'à montrer :

- (1) $GF = I$ où l'on devra utiliser la relation S .
- (2) $FG - I = hd + dh$ qui nécessitera l'utilisation de la relation $4Tu$.

(1) Montrons d'abord que $GF = I$. En effet, la relation de la sphère implique que $GF = 0 + I = I$.

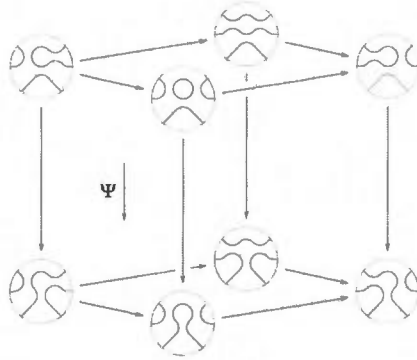
(2) Il reste maintenant la partie qui demande le plus de travail. Nous avons tout d'abord que $F^{-1}G^{-1} = 0$, alors il faut montrer que $-I = d^{-2}h^{-1} + h^0d^{-1}$. Nous avons bien sûr que $d^{-2}h^{-1} = 0$ et que $h^0d^{-1} = -I$ à isotopie près. Nous avons donc prouver que $F^{-1}G^{-1} \sim I$.

La preuve que $F^1G^1 \sim I$ est laissée au lecteur puisqu'elle est très analogue à ce que l'on vient de faire. La seule étape qu'il nous reste prouver est que $F^0G^0 - I = h^1d^0 + d^{-1}h^0$. Ici nous avons que $F^0G^0 = -\textcircled{\text{X}} \circ \textcircled{\text{X}} + \textcircled{\text{X}} - \textcircled{\text{X}} + I_{\text{X}}$. Cela implique donc que $F^0G^0 - I = -\textcircled{\text{X}} \circ \textcircled{\text{X}} + \textcircled{\text{X}} - \textcircled{\text{X}} - I_{\text{X}}$. D'autre part, nous avons que

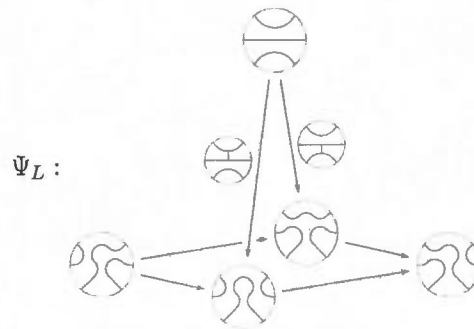
$h^1 d^0 + d^{-1} h^0 = \rangle \alpha \langle \circ \text{---} - \rangle \alpha \langle \circ \rangle \circ \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle$. Or, la relation des 4 tubes nous donne que $-\rangle \alpha \langle \circ \text{---} - \rangle \alpha \langle \circ \rangle \circ \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle = -\rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle \oplus \langle - \rangle \alpha \circ \rangle$. Cela implique que $F^0 G^0 - I = h^1 d^0 + d^{-1} h^0$.

Invariance sous R3 :

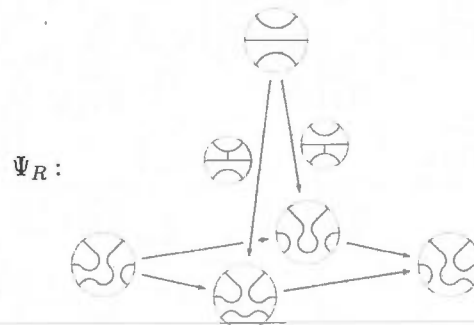
Comme pour le crochet de Kauffman, l'invariance sous le troisième mouvement de Reidemeister découle principalement de l'invariance sous le second mouvement de Reidemeister et d'un peu d'algèbre. En effet, le Lemme 2.3.1 nous donne directement que le complexe $\llbracket \otimes \rrbracket$ est équivalent au cône du morphisme $\Psi = \llbracket \otimes \rrbracket : \llbracket \otimes \rrbracket \rightarrow \llbracket \otimes \rrbracket$. On peut alors faire un diagramme qui correspond à la résolution de chacun de nos complexes :



En prenant l'inclusion de rétraction forte F vue dans la preuve de l'invariance sous le second mouvement de Reidemeister, on obtient du Lemme 2.3.2 que le carré du haut peut être remplacé par \otimes . Le diagramme ci-dessous nous montre l'équivalence d'homotopie entre $\llbracket \otimes \rrbracket$ et $\Psi F = \Psi_L$.



En effectuant un traitement analogue pour le morphisme $\llbracket \text{diagram} \rrbracket$, on a l'équivalence homotopique donnée par le diagramme ci-dessous :



Cependant, on peut facilement voir que les morphismes Ψ_L et Ψ_R sont isotopes et donc que nous avons l'isomorphisme recherché.

Il ne nous reste alors que le cas $\llbracket \text{diagram} \rrbracket$ est isotope à $\llbracket \text{diagram} \rrbracket$ à traiter. La preuve est tout à fait similaire, mais au lieu d'utiliser la première moitié du Lemme 2.3.2, elle fait référence à la seconde moitié du théorème. Cela démontre l'invariance du complexe de chaînes sous le troisième mouvement de Reidemeister. \square

Remarque 2.3.4. Il est possible de faire la preuve de l'invariance sous le troisième mouvement de Reidemeister sans utiliser les notions algébriques présentées dans les lemmes précédant le Théorème. Pour ce faire, on doit toutefois étudier un diagramme beaucoup plus compliqué, que l'on peut retrouver dans l'article (Bar-Natan, 2005).

Remarque 2.3.5. Nous avons montré l'invariance du complexe dans la catégorie Kom_h uniquement en regardant des enchevêtrements. Nous n'avons pas montré qu'il était suf-

fisant de voir que nous avons un invariant d'enchevêtrements pour obtenir un invariant de noeuds. Pour montrer ceci de manière formelle, on peut introduire la notion d'algèbre planaire et ainsi vérifier l'exactitude de cette remarque. Ce travail est fait dans la section 5 de (Bar-Natan, 2005).

2.4 Catégorie graduée et caractéristique d'Euler

Dans cette section, nous introduisons la notion de catégorie graduée afin de raffiner le Théorème 2.3.1. La notion qui sera introduite n'est pas très compliquée et n'ajoute pas de réelles difficultés à la preuve du théorème et elle nous permet de faire apparaître le polynôme de Jones à partir de notre complexe de chaînes. Nous aurons donc de nouveau une catégorification de ce polynôme.

Définition 2.4.1. On dit qu'une catégorie pré-additive \mathcal{C} est graduée si elle satisfait les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout objets $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, l'ensemble des morphismes $\text{Hom}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ est un groupe abélien gradué. Le morphisme $\deg : \text{Hom}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \rightarrow \mathbb{Z}$ est tel que $\deg f \circ g = \deg f + \deg g$. De plus, nous avons que $\deg I_{\mathcal{O}} = 0 \ \forall \mathcal{O} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.
- (2) Il existe une \mathbb{Z} -action $(m, \mathcal{O}) \mapsto \mathcal{O}\{m\}$, qui est un changement de degré comme nous l'avons défini dans le chapitre 1. Cette opération préserve les flèches, mais elle affecte leur degré. Donc si $f \in \text{Hom}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ et que $\deg f = d$, alors pour $f \in \text{Hom}(\mathcal{O}_1\{m_1\}, \mathcal{O}_2\{m_2\})$, on obtient que $\deg f = d + m_2 - m_1$.

Remarque 2.4.1. On peut facilement prendre une catégorie pré-additive \mathcal{C} satisfaisant la propriété (1) et obtenir une catégorie \mathcal{C}' qui est graduée. En effet, pour chaque élément $\mathcal{O} \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, on a les objets $\mathcal{O}\{m\}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. On peut alors définir la \mathbb{Z} -action de la condition (2). Pour ce qui est des flèches, on a que pour tout $f \in \text{Hom}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$, on a un morphisme $f_{m_1, m_2} \in \text{Hom}(\mathcal{O}_1\{m_1\}, \mathcal{O}_2\{m_2\})$. On leur donne donc un degré de la façon présentée dans la définition.

Si nous avons une catégorie graduée \mathcal{C} , alors nous pouvons munir d'une structure de catégorie graduée les catégories $\text{Mat}(\mathcal{C})$ et $\text{Kom}(\mathcal{C})$. Nous allons donc établir une notion

de degré pour les cobordismes afin d'obtenir une telle catégorie.

Définition 2.4.2. Soit $C \in \text{Hom}(\text{Cob}^3(B))$ un cobordisme dans un cylindre. Considérons $|B|$ le nombre de points de l'enchevêtrement qui touche au bord du cylindre. Alors on définit $\deg C := \chi(C) - \frac{1}{2}|B|$, où $\chi(C)$ est la caractéristique d'Euler de C .

Remarque 2.4.2. Calculer la caractéristique d'Euler d'un tel cobordisme est relativement simple, il suffit de faire une triangulation de la surface. La caractéristique d'Euler est alors donnée par la formule $\chi(C) = F + S - A$, où F est le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes.

Nous allons maintenant nous assurer que notre définition satisfait les axiomes pour que nous ayons une catégorie graduée. Pour ce faire, nous devons montrer que le degré des morphisme est additif sous la composition verticale, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un morphisme pour l'opération de composition, ainsi que sur la composition horizontale, c'est-à-dire lorsque nous ajoutons d'autres enchevêtrements dans notre cylindre.

Soient C, D des cobordismes tels que la composition $D \circ C$ ait du sens. Considérons une triangulation pour C et D , telle que chaque point sur le bord du cylindre est un sommet de notre triangulation. De plus, nous pouvons considérer que les sommets et les arêtes sur le bord des cobordismes que nous recollons coïncident. Puisque le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets sur une courbe simple fermée, alors sa contribution à la caractéristique d'Euler est nulle. Ceci implique que l'on peut compter cela deux fois sans toutefois changer le résultat. Cependant, si nous avons une courbe qui intersecte le bord de notre cylindre en deux points, alors il y aura un sommet de plus que d'arêtes. Cette différence est toutefois annulée par le facteur $|B|$. En effet, nous avons que $\chi(D \circ C) = \chi(D) + \chi(C) - \frac{1}{2}|B|$. D'où

$$\deg(D \circ C) = \chi(D \circ C) - \frac{1}{2}|B| = \chi(D) + \chi(C) - |B| = \deg(D) + \deg(C).$$

Nous pouvons aussi montrer que si nous avons un cobordisme comportant deux surfaces disjointes, alors le degré total est égal à la somme des degrés des surfaces. Il est aussi facile de montrer que les cobordismes \times et \times sont de degré -1 , tandis que les morphismes \bigcirc et \bigodot sont de degré $+1$.

Jusqu'à présent, nous avons réussi à poser une gradation sur la catégorie $\text{Cob}^3(B)$. Cela ne nous servirait toutefois à rien si nous ne pouvions pas étendre cette structure à la catégorie quotient Kob_h . Pour ce faire, nous remarquons d'abord que la caractéristique d'Euler ne change pas à homotopie près. Il ne nous reste alors qu'à montrer que la gradation est respectée par les relations de la sphère, du tore et des 4 tubes. La vérification est rapide. Lorsqu'il y a une sphère dans le cobordisme, celui-ci devient le cobordisme trivial et donc la caractéristique d'Euler est 0. Puisque la caractéristique d'Euler d'un tore est 0, la présence de celui-ci n'altère pas la caractéristique du cobordisme. Pour terminer, la relation des 4 tubes n'affecte pas non plus la caractéristique d'Euler des cobordismes dont il est question. Par conséquent, la gradation est bien définie sur la catégorie Kob_h .

Définition 2.4.3. Soit T un enchevêtrement avec n_+ croisement positifs et n_- croisements négatifs. On définit le nouveau complexe $\text{Kh}^r(T) := \llbracket T \rrbracket \{r + n_+ - n_-\}$ et avec les mêmes différentielles.

$$\begin{aligned} \llbracket T \rrbracket : \llbracket T \rrbracket^{-n_-} &\longrightarrow \dots \longrightarrow \llbracket T \rrbracket^{n_+} \\ \text{Kh}(T) : \llbracket T \rrbracket^{-n_-} \{n_+ - 2n_-\} &\longrightarrow \dots \longrightarrow \llbracket T \rrbracket^{2n_+ - n_-} \end{aligned}$$

Nous avons donc introduit un nouveau complexe afin de pouvoir en extraire le polynôme de Jones. De façon analogue à celle du chapitre 1, il faut tout d'abord prouver que c'est un invariant de noeuds, et que les différentielles sont de degré 0.

Théorème 2.4.1. (1) Les différentielles du complexe de chaînes $\text{Kh}(T)$ sont de degré 0.

(2) $\text{Kh}(T)$ est un invariant d'enchevêtrement à équivalence d'homotopie près. C'est-à-dire que si nous avons deux enchevêtrements T_1 et T_2 et que l'on peut obtenir T_2 à partir de T_1 et d'un nombre fini de mouvements de Reidemeisters, alors il existe une équivalence d'homotopie $F : \text{Kh}(T_1) \rightarrow \text{Kh}(T_2)$.

Démonstration. (1) Les différentielles de $\text{Kh}(T)$ sont toutes de la forme \mathbb{M} et nous savons que $\deg \mathbb{M} = -1$. Cependant, la présence du facteur r dans le changement de degré $\{r + n_+ - n_-\}$ fait en sorte que le degré de la différentielle est 0.

(2) Nous voulons maintenant prouver que ce nouveau complexe est un invariant d'enchevêtrements. Pour ce faire, il suffit de vérifier que les équivalences d'homotopies introduites dans le Théorème 2.3.1 sont bel et bien de degré 0. En effet, nous avons que $\textcircled{\times}$ est de degré 0 puisque la degré est additif sous la composition horizontale. D'autre part, $I_{\textcircled{\times}}$ est aussi de degré 0, ce qui implique que G est de degré 0. De manière similaire, on a que F est de degré 0 puisque $\textcircled{\times} + I_{\textcircled{\times}}$ est de degré 0. On peut ensuite remarquer que h est composé de morphismes de degré -1 et que d comporte des morphismes de degré $+1$, mais le changement d'hauteur des espaces vectoriels du complexe de chaînes annule ces modifications de degré. \square

Remarque 2.4.3. Encore une fois, cette preuve n'est pas tout à fait suffisante pour montrer l'invariance du complexe de chaînes pour un noeud. Il faut utiliser la notion d'algèbre planaire pour prolonger la notion d'invariance d'enchevêtrement à celle d'un invariant de noeud. Le lecteur peut lire la preuve dans la section 6 de (Bar-Natan, 2005).

2.5 Homologie de Khovanov et polynôme de Jones

Nous venons tout juste de construire un complexe de chaînes qui est un invariant pour les noeuds à homotopie près. Celui-ci est intéressant puisque les objets qui le composent se manipulent bien, en plus de nous fournir une composition naturelle ainsi qu'une notion d'équivalence sous homotopie. Nous introduirons l'homologie du complexe $\text{Kh}(T)$ afin d'extraire de l'information du complexe de chaînes. Nous obtiendrons alors un invariant intéressant et calculable.

Pour ce faire, nous introduirons d'abord une catégorie abélienne \mathcal{A} . Soit un foncteur $\mathcal{F}_1 : \text{Cob}_l^3 \rightarrow \mathcal{A}$, il est toujours possible d'étendre ce foncteur de manière naturelle à un foncteur $\mathcal{F}_2 : \text{Mat}(\text{Cob}_l^3) \rightarrow \mathcal{A}$. Celui-ci définit alors un foncteur $\mathcal{F} : \text{Kob} \rightarrow \text{Kom}(\mathcal{A})$. Pour tout enchevêtrement T , $\mathcal{F}\text{Kh}(T)$ est un complexe de chaînes et un invariant de T à homotopie près. Il en découle que les classes d'équivalences de $H(\mathcal{F}\text{Kh}(T))$ sont des invariants d'enchevêtrements.

Remarque 2.5.1. Il est souvent commode de penser à la catégorie des \mathbb{Z} -module ou encore

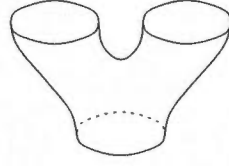


Figure 2.7 Pantalons renversés

à la catégorie des espaces vectoriels lorsque l'on parle d'une catégorie abélienne abstraite.

Bien que cette construction soit assez générale, nous allons donner un exemple de foncteur qui est intéressant pour l'étude de l'homologie de Khovanov. Soit $\mathcal{F} : \text{Cob}_1^3(\emptyset) \rightarrow \mathbb{Z}\text{Mod}$, un foncteur qui prend un cobordisme et qui donne un \mathbb{Z} -module gradué et tel qu'une union disjointe de cobordismes soit envoyée sur un produit tensoriel de modules. Un tel foncteur est un exemple de TQFT au sens d'Atiyah. Il est suffisant de définir le foncteur sur les générateurs des cobordismes ; \bigcirc représente un cercle, ∞ désigne une paire de pantalon et $\bigcirc\text{---}\bigcirc$ une paire de pantalons renversée, ainsi que $\bigcirc \cap \bigcirc$ et $\bigcirc \otimes \bigcirc$ qui ont déjà été définis.

Définition 2.5.1. Soit V un \mathbb{Z} -module libre ayant pour base $\{v_-, v_+\}$ tel que $\deg v_{\pm} = \pm 1$. On définit un foncteur TQFT \mathcal{F} par $\mathcal{F}(\bigcirc) := V$, $\mathcal{F}(\bigcirc \cap \bigcirc) := \epsilon : \mathbb{Z} \rightarrow V$, $\mathcal{F}(\bigcirc \otimes \bigcirc) := \eta : V \rightarrow \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}(\infty) := \Delta : V \rightarrow V \otimes V$ et $\mathcal{F}(\bigcirc\text{---}\bigcirc) := m : V \otimes V \rightarrow V$ comme suit :

$$\mathcal{F}(\bigcirc \cap \bigcirc) = \epsilon : \begin{cases} 1 \mapsto v_+ \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F}(\bigcirc \otimes \bigcirc) = \eta : \begin{cases} v_+ \mapsto 0 & v_- \mapsto 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{F}(\infty) = \Delta : \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_- \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\mathcal{F}(\bigcirc\text{---}\bigcirc) = m : \begin{cases} v_+ \otimes v_- \mapsto v_- & v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+ \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_- & v_- \otimes v_- \mapsto 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Remarque 2.5.2. On remarque tout de suite que le foncteur \mathcal{F} est bien défini puisqu'il préserve les relations imposées par l'ensemble de générateurs. De plus, ce foncteur préserve le degré des objets et des morphismes.

Nous avons maintenant un foncteur qui va de Cob^3 dans les \mathbb{Z} -modules. Toutefois, la catégorie qui nous intéresse est plutôt celle de Cob_l^3 .

Proposition 2.5.1. *Le foncteur \mathcal{F} satisfait les relations S , T et $4Tu$. Ceci définit donc un unique morphisme allant de Cob_l^3 dans les \mathbb{Z} -modules.*

Démonstration. (1) Regardons d'abord comment on peut obtenir une sphère à partir des générateurs. Une sphère est de la forme $\eta \circ \epsilon$. Or, on peut facilement voir par la définition des morphismes que $\eta \circ \epsilon = 0$.

(2) Pour réaliser un tore par composition de cobordismes, il faut d'abord obtenir une demi-sphère, suivie d'une paire de pantalons et d'une paire de pantalon renversée pour ensuite terminer avec une demi-sphère. Ceci se représente par la formule $\eta \circ \Delta \circ m \circ \epsilon$. Nous obtenons alors la formule suivante :

$$1 \xrightarrow{\epsilon} v_+ \xrightarrow{\Delta} v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \xrightarrow{m} v_- + v_- \xrightarrow{\eta} 1 + 1 = 2.$$

Cette égalité nous donne alors que le foncteur satisfait la relation du tore.

(3) Il ne reste plus qu'à prouver que le foncteur satisfait la règle des 4 tubes. Pour ce faire, nous devons vérifier l'égalité suivante sur les morphismes :

$$(\mathcal{F}(\text{diagram 1}) + \mathcal{F}(\text{diagram 2}))(1) = (\mathcal{F}(\text{diagram 3}) + \mathcal{F}(\text{diagram 4}))(1). \quad (2.5)$$

Nous pouvons écrire l'égalité précédente à partir des générateurs de la façon suivante :

$$\Delta \epsilon \otimes \epsilon \otimes \epsilon + \epsilon \otimes \epsilon \otimes \Delta \epsilon = \epsilon \otimes (1 \otimes \epsilon \eta \otimes 1)(\Delta \otimes 1) \Delta \epsilon + (1 \otimes \epsilon \eta \otimes 1)(\Delta \otimes 1) \Delta \epsilon \otimes \epsilon. \quad (2.6)$$

En évaluant les morphismes de gauche et de droite en 1, on obtient l'égalité voulue. Ceci prouve donc que le foncteur satisfait la relation des 4 tubes.

Notre foncteur est donc bien défini sur les classes d'isomorphisme de Cob_l^3 . \square

L'intérêt de créer ce foncteur est de pouvoir facilement trouver le polynôme de Jones une fois le foncteur appliqué. En effet, étant donné que ce foncteur préserve le degré des objets ainsi que des morphismes, nous pouvons utiliser le Théorème 1.2.1 pour prouver que la caractéristique d'Euler graduée de l'homologie du complexe obtenu est le polynôme de Jones. Donc nous avons que $H^r(\mathcal{F}Kh(L))$ est un invariant pour l'entrelacs L à valeur dans les \mathbb{Z} -modules.

Cette approche est plus générale que celle utilisée dans le chapitre 1. Il est possible de créer d'autres foncteurs qui nous donneront des invariants d'entrelacs. En effet, Lee a défini un foncteur différent de celui introduit par Khovanov dans (Lee, 2005). Les nouveaux morphismes qu'elle obtient ne préservent cependant pas les degrés. Par conséquent, on ne peut pas trouver le polynôme de Jones directement à partir du complexe obtenu. Il est toutefois possible de considérer une suite spectrale que nous introduirons dans le prochain chapitre et ainsi définir un invariant encore plus puissant que celui qui a été introduit dans ce mémoire. Cette suite spectrale sera utilisée dans le prochain chapitre et les détails la concernant se trouvent dans (Lee, 2005).

CHAPITRE III

LA CONJECTURE DE MILNOR

Ayant vu différentes façons d'obtenir une catégorification du polynôme de Jones dans une théorie homologique, nous verrons en quoi cette homologie peut être utile. Nous savons déjà que l'homologie de Khovanov est un invariant plus puissant que celui de Jones, mais une application qui fut vraiment importante de la théorie est une nouvelle preuve de la conjecture de Milnor. En effet, avant que Rasmussen ne trouve une preuve relativement simple à partir de l'homologie de Khovanov, la seule preuve connue faisait intervenir des résultats profonds de la théorie de jauge. La preuve que nous présenterons dans ce chapitre est très combinatoire, ce qui la rend également beaucoup plus simple. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la suite spectrale introduite par Lee dans (Lee, 2005) pour en extraire un invariant de noeuds $s(K)$. Il sera ensuite possible de trouver une relation entre cet invariant et le genre slice des noeuds toriques.

3.1 Le genre slice d'un noeud

Nous commencerons ce chapitre en définissant quelques notions fondamentales de la théorie des noeuds. Ces notions nous permettront ensuite de pouvoir formuler la conjecture de Milnor. Rappelons d'abord qu'un noeud est l'image d'un plongement lisse de S^1 dans S^3 et qu'un entrelacs est un ensemble disjoint de noeuds.

Définition 3.1.1. On dit qu'une surface F orientable, plongé dans S^3 est une surface de Seifert d'un entrelacs L si $\partial F = L$.

Remarque 3.1.1. Notons que de telles surfaces existent toujours et qu'il est possible d'en

construire à partir d'un algorithme simple que l'on peut trouver dans (Rolfsen, 1990), chapitre 5.

Les surfaces de Seifert sont très utiles puisqu'elles nous permettent de définir plusieurs invariants pour les noeuds. L'invariant donné par ces surfaces qui est le plus simple à définir est le genre d'un noeud.

Définition 3.1.2. Soit L un entrelacs. On définit le genre g de L par

$$g(L) := \min\{g_F \mid F \text{ est une surface de Seifert de } L\}$$

où g_F est le genre de la surface F .

Il est possible de trouver plus d'informations, de résultats et d'exemples dans (Rolfsen, 1990). Il existe une autre notion de genre pour les noeuds. Il s'agit de la notion du genre slice d'un noeud. Celui-ci est analogue à la notion de genre d'un noeud, mais au lieu de faire intervenir les surfaces de Seifert dans S^3 , on regarde les surfaces qui peuvent être plongées dans B^4 avec bord dans $S^3 = \partial B^4$.

Définition 3.1.3. Le genre slice d'un noeud K est donné par :

$$g_* := \min\{S \mid S \text{ est une surface orientée et plongée dans la boule } B^4, \text{ avec } \partial S = K\}.$$

Remarque 3.1.2. On note que le genre slice d'un noeud est toujours plus petit ou égal au genre de notre noeud. Cela est dû au fait que toute surface de Seifert peut être poussée dans l'intérieur de B^4 en fixant $K \subset S^3 = \partial B^4$ tout en demeurant plongée.

Définition 3.1.4. Un noeud de torique est un noeud dans S^3 qui peut être plongé de manière essentielle dans le tore standard T .

Il est possible de décrire tous les noeuds toriques en fonction des générateurs du premier groupe d'homologie du tore que nous notons μ et λ . Le méridien μ représente alors une courbe simple fermée non séparatrice qui borde un disque dans le tore plein. La longitude λ représente une courbe simple fermée sur le tore qui est homologue au noeud trivial

dans le tore plein, mais qui est essentiel sur le tore. Pour tout noeud torique K , il existe $p, q \in \mathbb{Z}$, avec p, q premiers entre eux tel que la classe d'homologie $\alpha(K) = p\mu + q\lambda$. K peut alors être visualisé comme un noeud qui fait p fois le chemin μ et q fois le chemin λ .

Milnor a émis la conjecture suivante sur le genre slice d'un noeud torique.

Conjecture de Milnor. *Le genre slice d'un noeud torique est égal à son genre de Seifert, c'est-à-dire que $g_*(L) := g(L) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.*

Le fait qu'il soit très difficile de visualiser et de calculer le genre slice d'un noeud en général rend ce résultat hautement non-trivial. La première preuve de ce résultat faisait appel à des outils fort avancés de la théorie de jauge, alors que Jacob Rasmussen a découvert une nouvelle preuve qui est beaucoup plus simple. En effet, une fois le bagage algébrique de l'homologie de Khovanov acquis, la preuve de ce théorème devient purement combinatoire. Un élément essentiel pour cette preuve de la conjecture de Milnor tient du fait qu'un noeud torique est un noeud positif. Nous définissons maintenant les groupes de tresses puisqu'ils nous permettront de calculer de manière combinatoire le genre slice des noeuds toriques.

Définition 3.1.5. Soit $B_n := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ et } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ si } |i - j| \geq 2 \rangle$ le groupe de tresse à n éléments.

Remarque 3.1.3. Les exemples qui suivent montrent de quelle façon il est possible de visualiser les groupes de tresses à l'aide des générateurs.

Exemple 3.1.1. Voici les éléments $\sigma_1, \sigma_2 \in B_3$:



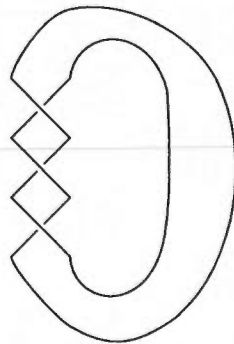
Exemple 3.1.2. Voici la tresse représentée par le mot $\sigma_1 \sigma_1 \sigma_1$ du groupe B_2 :



Définition 3.1.6. On dit qu'une tresse est positive s'il existe un mot la représentant qui ne contienne aucun inverse de générateurs.

Définition 3.1.7. On appelle un diagramme la fermeture d'une tresse le diagramme de la tresse auquel nous avons ajouté des brins parallèles allant des points finaux vers les points initiaux.

Exemple 3.1.3. Voici la fermeture de la tresse $\sigma_1\sigma_1\sigma_1$ qui donne une représentation du noeud de trèfle. :



Tous les noeuds ainsi que les entrelacs peuvent être décrits comme la fermeture d'un élément d'un groupe de tresses. Cependant, il existe des noeuds positifs qui ne peuvent pas être représentés comme étant la fermeture d'une tresse positive.

3.2 La théorie de Lee

Dans cette section, nous considérons un espace vectoriel gradué $V := V_{-1} \oplus V_1$ comme dans le premier chapitre. Cependant, nous introduisons de nouveaux morphismes de fusions et de séparation, ce qui entraînera un changement de TQFT.

Définition 3.2.1. Soient $m' : V \otimes V \longrightarrow V$ et $\Delta' : V \longrightarrow V \otimes V$ les morphismes induits par des cobordismes donnés par les équations suivantes :

$$m' := \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow v_+ & v_- \otimes v_+ \rightarrow v_- \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow v_- & v_- \otimes v_- \rightarrow v_+ \end{cases}$$

$$\Delta' := \begin{cases} v_+ \rightarrow v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \rightarrow v_- \otimes v_- + v_+ \otimes v_+ \end{cases}$$

Nous pouvons définir une nouvelle différentielle d' en remplaçant les applications m et Δ dans la définition de la différentielle vue dans la section 1.3. Nous appellerons alors le nouveau complexe de chaînes obtenu $CKh'(L)$ et $Kh'(L)$ sera son homologie.

L'une des différences majeures entre ces applications et celles introduites dans le chapitre 1 est le fait qu'elles ne soient pas de degré -1 . En fait, $\Delta'(v_-)$ n'est même pas homogène, ce qui complique quelque peu la tâche pour retrouver le polynôme de Jones. En effet, dans le chapitre 1, nous utilisons le fait que la différentielle était de degré 0 pour calculer le polynôme de Jones. Nous devons toutefois trouver un autre moyen de le trouver avec cette nouvelle approche.

Dans le but de rendre les calculs plus simples, Lee a introduit une nouvelle base pour l'espace vectoriel V . Posons donc $a := v_- + v_+$ et $b := v_- - v_+$. Nous avons donc que :

$$m' := \begin{cases} a \otimes a \rightarrow 2a & a \otimes b \rightarrow 0 \\ b \otimes a \rightarrow 0 & b \otimes b \rightarrow -2b \end{cases}$$

$$\Delta' := \begin{cases} a \rightarrow a \otimes a \\ b \rightarrow b \otimes b \end{cases}$$

De plus, Lee définit deux applications $\epsilon' : V \longrightarrow \mathbb{Q}$ et $\iota' : \mathbb{Q} \longrightarrow V$ telles que $\epsilon'(a) =$

$$\epsilon'(b) = 1 \text{ et } \iota'(1) = \frac{a-b}{2}.$$

Théorème 3.2.1. *Soit L un entrelacs à n composantes, alors $Kh'(L)$ est de rang 2^n .*

Démonstration. Ce résultat a été prouvé dans (Lee, 2005). Pour ce faire, Lee crée une bijection entre les orientations qu'il est possible de donner à un entrelacs et les générateurs de $Kh'(L)$. Pour ce faire, elle procède par récurrence sur le nombre de composantes de l'entrelacs. Nous ne ferons pas les détails de la preuve ici, mais nous prendrons tout de même la peine de décrire l'application, sans toutefois prouver qu'il s'agisse bel et bien d'une bijection.

Prenons tout d'abord une orientation o de L et résolvons ensuite l'entrelacs en respectant l'orientation o .

Nous obtenons alors ce que l'on appelle un état de $Kh'(L)$. Cet état est un ensemble de cercles qu'il faut ensuite étiquetter. Pour ce faire, on crée un invariant numérique sur nos cercles. Pour chacun des cercles, on compte le nombre de cercles dans lequel il est contenu.

Une fois cette étape réalisée, on regarde l'orientation de notre cercle. Si celle-ci est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on ajoute 1 au nombre précédemment calculé et on ajoute 0 sinon.

On considère alors le résultat modulo 2. Si un cercle a un invariant de 0 modulo 2, alors on l'étiquette par $a \in V$ définit précédemment. Sinon, on l'étiquette par $b \in V$. On nomme alors l'état obtenu par s_o . Nous avons alors que s_o est une classe homologique de la résolution induite par l'orientation o . Ainsi, pour chaque orientation o , nous obtenons un générateur de $Kh'(L)$. Le résultat suit du fait qu'il est possible de poser 2^n orientations différentes sur un entrelacs à n composantes. \square

La méthode de résolution du noeud que nous utilisons est spéciale. Elle nous permet d'établir certaines propriétés que satisferont les enchevêtrement lorsque ces résolutions seront faites.

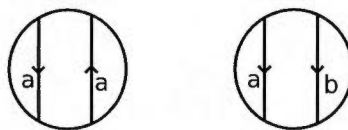


Figure 3.1 Orientations pour les droites de s_0 .

Lemme 3.2.1. *Soit T un enchevêtrement d'une résolution d'un noeud L contenant exactement deux droites, comme on peut le voir dans la figure 3.1. Alors soit l'orientation des deux segments est la même et ainsi elles ont une étiquette différente, soit elles ont la même étiquette et une orientation opposée.*

Démonstration. Il y a trois cas possible :

- (1) Les deux droites de l'enchevêtrement appartiennent au même cercle.
- (2) Ils appartiennent à deux cercles différents, mais l'un d'entre eux est inclu dans l'autre.
- (3) Ils appartiennent à deux cercles différents, mais aucun n'est inclu dans l'autre.

(1) Si les deux droites appartiennent au même cercle, alors leur orientation sera différente et ils auront la même étiquette.

(2) Si un des deux cercles C_1 et C_2 avec C_1 dans C_2 , alors C_1 est inclu dans un cercle de plus que C_2 . Si les deux cercles ont la même orientation, alors leur invariant modulo 2 aura une différence de 1 et ils seront donc étiquetés différemment. Sinon, l'invariant de nos deux cercles sera le même et ils auront ainsi la même étiquette.

(3) Dans cette situation, les deux cercles sont contenus dans le même nombre de cercle. La seule chose qui modifiera leur étiquetage est donc leur orientation. S'ils ont la même orientation dans l'enchevêtrement, alors leur orientation globale est l'inverse l'une de l'autre. Cela implique donc directement le théorème. \square

Corollaire 3.2.1. *Si deux cercles dans une résolution partageaient un croisement, alors ils ont une étiquette différente.*

Démonstration. Nous procéderons par l'absurde à l'aide d'un dessin :



Ceci est une contradiction puisque ça ne peut pas provenir d'une résolution respectant une orientation. \square

3.3 Filtrations et suites spectrales

Notre but maintenant est de décrire le lien entre la théorie introduite par Lee et l'homologie de Khovanov. Ce lien est loin d'être trivial. Pour l'établir, nous devons considérer des doubles complexes de chaînes ainsi que de puissants outils algébriques.

Définition 3.3.1. Soit M un R -module. Une filtration bornée de M est une suite de sous-modules M_j de M telle que :

$$0 = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M.$$

Une filtration d'un complexe de chaînes C est une suite de sous-module $C_{j,*}$ de C_* , i.e. $C_{j,i} \subset C_{j-1,i}$ pour tout i , tels que cette inclusion est préservée par la différentielle, c'est-à-dire que $\partial(C_{j,i}) \subset C_{j,i+1}$.

Pour une filtration d'un complexe $\{C_{j,*}\}$, on considère souvent le complexe quotient $C'_{j,*} := C_{j,*}/C_{j+1,*}$. Celui-ci nous donne beaucoup d'informations sur notre complexe C grâce aux suites exactes courtes suivantes :

$$0 \longrightarrow C_{j+1,*} \longrightarrow C_{j,*} \longrightarrow C'_{j,*} \longrightarrow 0.$$

Puisque $C_{0,*} = 0$, nous pouvons déterminer les $C_{j,*}$ de manière récursive à partir des complexes $C'_{j,*}$.

Remarque 3.3.1. La différentielle d'un complexe de chaînes C_* nous donne une différentielle sur les complexes de chaînes $C'_{j,*}$.

Remarque 3.3.2. Une filtration $\{C_{j,*}\}$ d'un complexe de chaînes C_* induit aussi une filtration $\{S_j\}$ sur $H_*(C)$ définie comme suit : $[x] \in H_*(C)$ est dans S_j si et seulement si $[x]$ admet un représentant dans $C_{j,*}$.

Pour bien voir toute l'information que l'on peut extraire d'une filtration, nous présenterons maintenant brièvement la notion de suite spectrale. Cette section est un survol rapide de cette théorie que l'on peut étudier dans (Bott et Tu, 1982). Le principe sous-jacent à une suite spectrale est de pouvoir calculer l'homologie d'un complexe de chaînes en faisant en quelque sorte différentes approximations de celle-ci. Pour ce faire, nous poserons d'abord

$$E_{p,q}^0 := C'_{p,p+q} = C_{p,p+q}/C_{p+1,p+q}.$$

Comme nous l'avons mentionné dans la remarque 3.3.1, nous avons une différentielle naturelle sur le complexe $E_{p,q}^0$. Nous pouvons alors considérer l'homologie de ce complexe que nous noterons de la façon suivante :

$$E_{p,q}^1 := H_{p,q}(E_{p,q}^0).$$

Pour faire de $E_{p,q}^1$ un complexe de chaîne, il faut définir une différentielle. Pour une classe d'homologie $\alpha \in E_{p,q}^1$, il existe $x \in C_{p,p+q}$ tel que $\alpha = [x]$ et $\partial x \in C_{p+1,p+q-1}$. Posons alors la différentielle $\partial_1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p+1,q}^1$, avec $\partial_1(\alpha) := [\partial x]$. Les propriétés usuelles de différentielle de ∂ se transposent à ∂_1 et nous permet de considérer l'homologie de ce complexe en posant :

$$E_{p,q}^2 := \frac{\text{Ker}\{\partial_1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p+1,q}^1\}}{\partial_1(E_{p-1,q}^1)}.$$

Il est alors possible de définir récursivement les complexes de chaînes, ce qui nous mène au théorème suivant dont on peut retrouver la preuve dans (Hutchings, 2011).

Théorème 3.3.1. Soit $(C_{p,*}, \partial)$ une filtration d'un complexe de chaînes. Si on pose

$$E_{p,q}^r := \frac{\{x \in C_{p,p+q} \mid \partial x \in C_{p+r,p+q-1}\}}{C_{p+1,p+q} + \partial C_{p-r+1,p+q-1}}, \text{ alors :}$$

(1) ∂ induit une différentielle :

$$\partial_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p+r,q+r-1}^r.$$

- (2) $E_{p,q}^r$ est le r -ième groupe d'homologie du complexe $(E_{p,q}^r, \partial_r)$.
- (3) $E_{p,q}^1 = H_{p,q}(C'_{p,p+q})$
- (4) Si la filtration $(C_{p,*}, \partial)$ est bornée, alors il existe un r assez grand tel que :

$$E_{p,q}^r := S_{p+q}/S_{p+q-1}$$

où $S_{p,q}$ est la filtration induite à $H_*(C)$ par la filtration $(C_{p,*}, \partial)$.

Définition 3.3.2. Une suite spectrale est un ensemble de R -modules $E_{p,q}^r$ définie pour tous les $p, q \in \mathbb{Z}$ et pour tous les $r > 0$ ainsi que des différentielles $\partial_r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p+r,q+r-1}^r$, avec $\partial_r^2 = 0$ et la relation voulant que E^{r+1} est l'homologie du complexe E^r .

L'idée de Lee a été de créer une filtration dans le complexe de chaînes qu'elle a introduit dans le but de créer un invariant. Cette filtration se décrit très bien ; nous prendrons tout d'abord une graduation sur le complexe de chaînes que nous avons défini dans le premier chapitre. Pour ce faire, on définit $p : V \rightarrow \mathbb{Z}$ par $p(v^\pm) = \pm 1$. On étend ensuite cette définition à $V^{\otimes n}$ par $p(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = p(v_1) + p(v_2) + \cdots + p(v_n)$. Nous posons ensuite la fonction $gr(v) := |v| - n_-$ qui compte le nombre de 1-résolutions dans la résolution de notre noeud moins le nombre de croisements négatifs. On pose alors

$$q(v) := p(v) + gr(v) + n_+ - n_-$$

où n_+ représente le nombre de croisements positifs.

Cette graduation est invariante sous l'application de la différentielle d introduite dans le chapitre 1. Cette affirmation n'est toutefois pas vraie pour la différentielle d' introduite par Lee. Nous poserons donc :

$$\Phi_m := \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow 0 & v_- \otimes v_+ \rightarrow 0 \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow 0 & v_- \otimes v_- \rightarrow v_+ \end{cases}$$

$$\Phi_\Delta := \begin{cases} v_+ \rightarrow 0 \\ v_- \rightarrow v_+ \otimes v_+ \end{cases}$$

On trouve alors les relations suivantes :

$$m' = m + \Phi_m \quad \Delta' = \Delta + \Phi_\Delta.$$

Les opérations Φ sont alors des opérations de degré 4 par rapport à notre graduation. Cela nous informe sur la forme des monômes dans d' . En effet, chacun des monômes de $d'(v)$ sera de degré plus grand ou égal au degré de v . Ceci implique que cette graduation induit une filtration sur notre nouveau complexe $CKh'(L)$.

Lee a ensuite étudié cette filtration et la suite spectrale qui en découle. Dans (Lee, 2005), elle prouve le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *Il existe une suite spectrale $E_{p,q}^r$ qui converge vers $Kh'(L)$. De plus, $E^2 = Kh(L)$ et tous les termes de la suite spectrale qui suivent E_2 sont des invariants de l'entrelacs L .*

3.4 L'invariant de Rasmussen

L'un des éléments importants du chapitre précédent est qu'une filtration d'un complexe de chaînes induit une filtration pour l'homologie qui lui est associée. Nous noterons par s la graduation induite sur $Kh'(L)$ par la q -graduation de $CKh'(L)$.

Définition 3.4.1. Soit

$$s_{min}(L) := \min\{s(x) | x \in Kh'(L), x \neq 0\}$$

$$s_{max}(L) := \max\{s(x) | x \in Kh'(L), x \neq 0\}$$

les graduations minimale et maximale pour notre homologie.

Remarque 3.4.1. Le fait que $s_{min}(K)$ et $s_{max}(K)$ soient des invariants découle du théorème 3.3.2. En effet, l'invariance des termes de notre suite spectrale implique que ces deux fonctions sont des invariants. Il est également possible de trouver une preuve faisant appel aux mouvements de Reidemeister dans la section 6 de (Rasmussen, 2010).

La définition implique directement que $s_{\max}(K) \geq s_{\min}(K)$. De plus, le fait que les q -dimensions d'un noeud K soient toujours impaires implique que $s_{\min}(K)$ et $s_{\max}(K)$ sont toujours impairs. Nous allons maintenant calculer ces invariants dans quelques exemples.

Exemple 3.4.1. Prenons tout d'abord le noeud trivial. Son homologie étant de rang 2, on obtient que les q -graduations sont ± 1 . Nous avons donc que $s_{\max} = 1$ et que $s_{\min} = -1$.

Exemple 3.4.2. Si on prend K le noeud de trèfle, on a alors que $s_{\min}(K) = -3$ et que $s_{\max}(K) = -1$.

Lemme 3.4.1. *Soit n le nombre de composantes de L . Il existe une décomposition en somme directe $Kh'(L) = Kh'_e(L) \oplus Kh'_o(L)$ où $Kh'_o(L)$ est engendrée par les s_o dont la q -dimension est congruente à $2+n \pmod{4}$ et $Kh'_e(L)$ est générée par ceux congruents à $n \pmod{4}$. Si o est une orientation de L , alors $s_o + s_{\bar{o}}$ apparaît dans un terme et $s_o - s_{\bar{o}}$ apparaît dans l'autre, où \bar{o} est l'orientation inverse de o .*

Démonstration. En utilisant les applications Φ_m et Φ_Δ dans la définition de m' et de Δ' , on remarque que m et Δ préservent la q -dimension et on peut facilement montrer que Φ_m et Φ_Δ l'augmentent de 4. Les espaces $Kh'_o(L)$ et $Kh'_e(L)$ sont stables sous ces opérations, ce qui implique la décomposition.

Pour la seconde partie, on crée une nouvelle q' -dimension où $q'(v_-) = 0$ et $q'(v_+) = 2$. Soit $i: V \rightarrow V$ tel que $i(v_-) = v_-$ et $i(v_+) = -v_+$. Cela implique que $i(a) = b$ et $i(b) = a$ où $a = v_- + v_+$ et $b = v_- - v_+$ tel que défini précédemment. On montre ensuite que $\eta(s_o) := \pm i^{\otimes n}(s_o) = \pm s_{\bar{o}}$. D'où $\eta(s_o) = \pm s_{\bar{o}}$.

Puisque s_o et $s_{\bar{o}}$ sont des éléments de la base, alors on a que $s_o + \eta(s_{\bar{o}})$ est non-nul et appartient à l'une des composantes de la décomposition, tandis que $s_o - \eta(s_{\bar{o}})$ appartient à l'autre composante. \square

Corollaire 3.4.1. $s(s_o) = s(s_{\bar{o}}) = s_{\min}(K)$

Corollaire 3.4.2. $s_{\max}(K) > s_{\min}(K)$

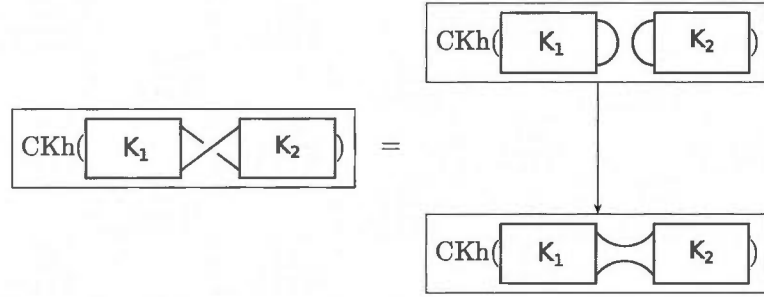


Figure 3.2 Courte suite exacte pour la résolution d'une somme connexe de noeuds.

Démonstration. Comme $Kh'(K)$ se décompose en somme directe de deux termes non-triviaux, alors sa suite spectrale également. Par le Lemme 3.4.1, on a que les termes n'ont pas la même q -dimension. Cela suffit puisque la définition de nos invariants implique déjà que $s_{\max}(K) \geq s_{\min}(K)$, si bien que des q -dimensions différentes donnent l'inégalité stricte. \square

Lemme 3.4.2. *Soit K_1, K_2 deux noeuds. Il y a alors une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow Kh'(K_1 \# K_2) \xrightarrow{p_*} Kh'(K_1) \otimes Kh'(K_2) \xrightarrow{\delta} Kh'(K_1 \# K_2) \rightarrow 0$$

où p_* et δ sont des applications de degrés -1 .

La définition des morphismes p_* et δ se trouve dans la preuve du Lemme que l'on peut lire dans (Rasmussen, 2010).

Proposition 3.4.1.

$$s_{\max}(K) = s_{\min}(K) + 2.$$

Démonstration. Nous utiliserons la suite exacte courte introduite dans le lemme précédent en posant $K_1 := K$ et $K_2 := K_0$ le noeud trivial. Étant donné que nous avons un noeud, alors $Kh'(K)$ est de rang 2. Soient s_a, s_b les générateurs de $Kh'(K)$ et a, b ceux de $Kh'(K_0)$. On peut alors supposer que $s(s_a - s_b) = s_{\max}(K)$. On peut donc voir de la

figure 3.2 que $\delta((s_a - s_b) \otimes a) = s_a$ puisque le morphisme δ correspond à une opération de fusion. De plus, puisque δ est de degré -1 , alors on en conclut que :

$$s((s_a - s_b) \otimes a) \leq s(s_a) + 1.$$

Mais par le corollaire 3.4.1, on sait que $s_a = s_{\min}(K)$ et que $s(a) = s_{\min}(K_0) = -1$, d'où

$$s_{\max}(K) - 1 \leq s_{\min}(K) + 1.$$

Or le lemme 3.4.2 nous assure que $s_{\max}(K) \neq s_{\min}(K)$, d'où le résultat $s_{\max}(K) = s_{\min}(K) + 2$. \square

Nous avons donc une relation directe entre nos deux invariants. Nous pouvons alors définir l'invariant de Rasmussen.

Définition 3.4.2. Posons

$$s(K) := s_{\max}(K) - 1 = s_{\min}(K) + 1.$$

On appelle $s(K)$ l'invariant de Rasmussen.

Pour terminer cette section, nous donnerons quelques propriétés de cet invariant. Le premier résultat que nous montrerons est le lien entre l'invariant de Rasmussen d'un noeud K et celui de son image miroir K^* .

Proposition 3.4.2. Soit K^* l'image miroir d'un noeud K . Alors :

$$s_{\max}(K^*) = -s_{\min}(K)$$

$$s_{\min}(K^*) = -s_{\max}(K)$$

$$s(K^*) = -s(K).$$

Démonstration. Nous ne donnerons qu'une idée de la preuve de ce théorème. Soit C un complexe de chaînes avec une filtration $C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_n = 0$. Alors le complexe dual C^* admet une filtration $0 = C_0^* \subset C_{-1}^* \subset \dots \subset C_{-n}^* = C$, où l'espace C_{-i}^* est l'espace dual de C_i . On peut alors créer un isomorphisme $\phi: (V, m', \Delta') \rightarrow (V^*, m'^*, \Delta'^*)$ qui envoie v_{\pm} sur v_{\mp} . En prenant un état v de K^* , on définit $R(v)$ l'état de K obtenu en appliquant r à toutes les étiquettes de v . Cela nous permet de déduire que $R: \text{CKh}'(K^*) \rightarrow \text{CKh}'(K)^*$ est un isomorphisme. Par la suite, on utilise le fait général que des complexes de chaînes ayant des filtrations duales induisent des suites spectrales duales (Hilton et Stambach, 1997). Alors les états $s_{\min}(K)$ et $s_{\max}(K)$ dans $E^{\infty} = \text{CKh}'(K)$ deviennent les éléments $-s_{\max}(K^*)$ et $-s_{\min}(K^*)$ de $(E^{\infty})^* = \text{CKh}'(K)^* \simeq \text{CKh}'(K^*)$. \square

Un autre résultat simplifiant la manipulation de l'invariant de Rasmussen est le fait qu'il réagisse particulièrement bien sous l'opération de la somme connexe. Cela nous permet de calculer l'invariant de Rasmussen pour les noeuds uniquement à partir des noeuds premiers.

Proposition 3.4.3. *L'invariant de Rasmussen est additif sous la somme connexe, c'est-à-dire que $s(K_1 \# K_2) = s(K_1) + s(K_2)$.*

La preuve de ce résultat utilise la suite exacte courte introduite dans le Lemme 3.4.2. Pour les détails de la preuve, le lecteur peut se référer à (Rasmussen, 2010).

3.5 L'invariant de Rasmussen et le genre slice

Maintenant que nous connaissons quelques propriétés de l'invariant de Rasmussen, la question que nous nous poserons est la suivante : est-ce que cet invariant nous fournit des renseignements topologiques sur notre noeud ? Pour répondre à cette question, nous devons faire appel aux cobordismes en étudiant les liens entre ceux-ci et les classes homologiques.

Soit S un cobordisme entre L_0 et L_1 . Nous avons vu dans le chapitre 2 qu'un cobor-

disme induit une application entre les groupes d'homologie. Posons alors $\Phi_S: Kh'(L_0) \rightarrow Kh'(L_1)$ l'application induite par S sur nos groupes d'homologie. Chacun des cobordismes peut être décomposé en $\Phi_S = \Phi_{S_n} \cdots \Phi_{S_1}$, où les S_i sont des cobordismes élémentaires. Rappelons qu'un cobordisme élémentaire est un cobordisme représentant un unique mouvement permettant de passer d'un diagramme planaire à un autre. Il est possible de trouver plus d'informations sur le sujet dans (Carter et Saito, 1993).

Proposition 3.5.1. *Soit S un cobordisme orienté de L_0 vers L_1 qui est faiblement connexe, ce qui veut dire que toute composante connexe de S a un bord non-vide dans L_0 . Alors $\Phi_S[s_{o_0}]$ est un multiple non-nul de $[s_{o_1}]$.*

Démonstration. L'idée derrière cette preuve n'est pas très difficile. En fait, on décompose notre morphisme en morphismes de cobordismes élémentaires, c'est-à-dire les cobordismes représentant les mouvements de Reidemeister, en plus des paires de pantalons et l'ajout ou le retrait d'une demi-sphère. On peut trouver les détails de cette preuve dans (Rasmussen, 2010). \square

Corollaire 3.5.1. *Si S est un cobordisme connexe allant de K_0 vers K_1 , alors Φ_S est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit o une orientation de K_0 , Alors $\{s_{o_0}, s_{\overline{o_0}}\}$ forme une base de $Kh'(K_0)$. Or $\Phi(s_{o_0}) = k_1 s_{o_1}$ et $\Phi(s_{\overline{o_0}}) = k_2 s_{\overline{o_1}}$. Étant donné que $k_1, k_2 \neq 0$, alors $\{k_1 s_{o_1}, k_2 s_{\overline{o_1}}\}$ est une base de $Kh'(K_1)$. \square

Des cobordismes connexes entre deux résolutions de noeuds induisent donc des isomorphismes. Ce résultat sera important pour la suite des choses. En effet, Rasmussen a établi un lien entre son invariant et le genre slice d'un noeud. Ce résultat est particulièrement intéressant puisqu'il permet de faire un lien direct entre l'homologie de Khovanov et une notion topologique. Ceci est important puisque l'homologie de Khovanov était une construction algébrique abstraite, rien ne nous garantissait à priori que cet invariant nous renseignerait sur certaines propriétés topologiques.

Théorème 3.5.1.

$$|s(K)| \leq 2g_*(K).$$

Démonstration. Supposons que $K \subset S^3$ est le bord d'une surface S de genre g dans B^4 . Il existe alors un cobordisme F orientable et connexe de caractéristique d'Euler $-2g$ entre K et le noeud trivial K_0 .

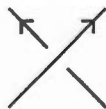
Soit $x \in Kh'(K)$ non-nul, un élément pour lequel $s(x) = s_{\max}(K)$. Soit Φ_S l'isomorphisme induit par notre cobordisme. Le fait que ce soit un isomorphisme implique que $\Phi_S(x) \neq 0$ dans $Kh'(K_0)$. Φ_S est donc de degré $-2g$, d'où $s(\Phi_S(x)) \geq s(x) - 2g$. De plus, on sait que $s_{\max}(K_0) = 1$, donc $s(\Phi_S(x)) \leq 1$. Cela implique donc que $s(x) \leq 2g + 1$, ce qui veut dire qu'en particulier, $s_{\max}(K) \leq 2g + 1$. Nous avons donc prouvé que $s(K) \leq 2g$.

Pour montrer que $s(K) \geq -2g$, on fait le même raisonnement avec K^* le noeud miroir de K . Le fait que $s(K^*) = -s(K)$ nous prouve alors que $s(K) \geq -2g$ et donc que $|s(K)| \leq 2g$.

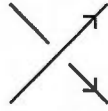
□

Nous avons donc réussi à borner supérieurement l'invariant de Rasmussen par le genre slice. Cette inégalité est vraie en toute généralité. Cependant, il est possible de raffiner notre condition lorsque nous considérons une classe particulière de noeuds, les noeuds dits *positifs*.

Définition 3.5.1. Un noeud positif est un noeud qui possède un diagramme orienté tel que tous les croisements sont de la forme :



Remarque 3.5.1. Il est possible de définir la notion analogue d'être un noeud négatif. Les croisements sont alors de la forme :



Tous les noeuds négatifs sont des noeuds miroirs de noeuds positifs.

Exemple 3.5.1. Les noeuds provenant de la fermeture d'un diagramme de tresse positive sont des noeuds positifs.

Exemple 3.5.2. Les noeuds toriques sont positifs si $pq > 0$ et sont négatifs si $pq < 0$.

Pour ces noeuds bien particuliers, la relation entre le genre slice et l'invariant de Rasmussen est encore plus forte.

Théorème 3.5.2. *Si K est un noeud positif, alors :*

$$s(K) = 2g(K) = 2g_*(K)$$

où $g(K)$ est le genre du noeud et $g_*(K)$ est le genre slice.

Démonstration. Soit K un noeud positif. On définit une orientation o sur un diagramme positif de K et on considère ensuite le générateur associé s_o . Cet élément se trouvera alors dans la 0-résolution de notre diagramme, c'est-à-dire celle où tous les croisements ont été résolus par la 0-résolution. L'état s_o est alors dans la partie de graduation 0 de l'homologie et il n'y a aucun générateur ayant une graduation de -1 . Il s'en suit que s_o est l'unique représentant de sa classe d'équivalence et on a alors que $s_{\min}(K) = s([s_o]) = q(s_o)$.

Notre objectif est donc de calculer $q(s_o)$. Pour ce faire, nous utiliserons la base $\{v_-, v_+\}$. L'unique état qui minimise la q -dimension pour la classe de s_o est celui où chacun des cercles est étiqueté par v_- . Ceci implique que :

$$q(s_o) = p(s_o) + gr(s_o) + n_+ - n_- = -k + 0 + n - 0$$

où K est un noeud avec n croisements et où la résolution associée à o contient exactement k cercles. Cela nous donne alors directement que $s(K) = n - k + 1$.

Cependant, l'algorithme pour construire une surface de Seifert nous donne une surface S pour le noeud K dont la caractéristique d'Euler est $k - n$, ainsi

$$2g(K) \leq 2g(S) = n - k + 1 = s(K) \leq 2g_*(K).$$

Puisque $g_*(K) \leq g(K)$ pour tout noeud, toutes les inégalités ci-dessus deviennent des égalités. D'où $s(K) = 2g(K) = 2g_*(K)$. \square

Remarque 3.5.2. Ceci s'applique également aux noeuds négatifs.

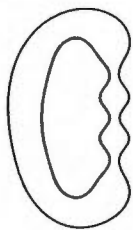
Grâce au théorème 3.5.2, il suffit de calculer l'invariant de Rasmussen d'un noeud positif pour connaître son genre slice. Ce résultat nous permet de nous attaquer à la conjecture de Milnor pour conclure ce mémoire.

Théorème 3.5.3. *Le genre slice d'un noeud torique de type (p, q) est $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.*

Démonstration. La partie la plus importante pour être en mesure de calculer l'invariant de Rasmussen de manière efficace dans le cas des noeuds toriques est fait que ces noeuds sont fermetures de diagrammes de tresses positives. De plus, chaque diagramme est assez simple. Un noeud torique (p, q) , que nous nommerons K , peut être représenté par une tresse positive par le diagramme représentant le mot $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{p-1})^q$. Comme nous avons vu dans la preuve précédente, il suffit de calculer la q -dimension pour avoir l'invariant de Rasmussen. Or la 0-résolution d'un tel diagramme est particulièrement simple. Puisque chacun des croisements est positif, chacun des croisement du diagramme est de la forme :



la résolution du diagramme de l'entrelacs ne comportera donc que des droites parallèles. Voici l'exemple pour le noeud trèfle.



Cela veut donc dire que nous avons p cercles et $q(p-1)$ croisements. Cela implique donc que $s(K) = qp - q - p + 1 = (p-1)(q-1)$. Par le théorème 3.5.2, on obtient bien que $g_*(K) = \frac{s(K)}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$. \square

CONCLUSION

Comme nous pouvons le voir dans cette preuve, suite à un développement d'outils algébriques, l'homologie de Khovanov nous permet de trouver une preuve combinatoire de la conjecture de Milnor. Cette conjecture implique que le genre slice d'un noeud torique est égal à son genre de Seifert. Notons cependant que les noeuds toriques ne sont qu'une forme particulière de noeuds algébriques. De tels noeuds sont obtenus à partir de courbes algébriques complexes. Pour ce faire, on considère une courbe algébrique complexe \mathcal{C} dans le plan affine donnée par $f(x, y) = 0$ et telle que 0 soit une valeur critique. En prenant l'intersection de la courbe avec une petite 3-sphère centrée autour de $(0, 0) \in \mathbb{C}$, on obtient un noeud, que l'on appelle *noeud algébrique*. Un noeud torique de type (p, q) est en fait un exemple de noeuds algébriques associée à la courbe $x^p + y^q = 0$.

Par ailleurs, tous les noeuds algébriques sont fermetures de tresses positives. Puisque la fermeture d'une tresse positive est un noeud positif, par les travaux de Rasmussen exposés dans ce mémoire, les noeuds algébriques aussi ont la propriété que leur genre slice et leur genre de Seifert concordent. Notons la suite d'inclusions :

$$\{\text{Noeuds toriques}\} \subset \{\text{Noeuds algébriques}\} \subset \{\text{Tresses positives}\} \subset \{\text{Noeuds positifs}\}.$$

Les noeuds positifs sont un sous-ensemble d'une classe de noeuds que l'on appelle *noeud fortement quasi-positif* et qui a été grandement étudié au cours des dernières années. Grâce aux recherches de différents mathématiciens, notamment (Rudolph, 1983), (Livingston, 2004) et (Hedden, 2010), il a été possible de trouver une caractérisation de ces noeuds en fonction des groupes de tresses. Livingston a prouvé dans (Livingston, 2004) que pour un noeud fortement quasi-positif K , $g_*(K) = g(K)$. Les noeuds fortement quasi-positifs sont finalement un cas particulier d'une classe de noeud plus vaste encore, les *noeuds quasi-positifs*. Grâce aux travaux de (Rudolph, 1999) et de (Boileau

et Orevkov, 2001), il fut prouvé que les noeuds quasi-positifs sont exactement les noeuds \mathbb{C} -*transverse*. Il est possible de se demander s'il existe une caractérisation des noeuds pour lesquels le genre slice et le genre de Seifert coïncident.

BIBLIOGRAPHIE

- Bar-Natan, D. 2002. « On Khovanov's categorification of the Jones polynomial ». *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 2, p. 337–370 (electronic).
- . 2005. « Khovanov's homology for tangles and cobordisms ». *Geom. Topol.*, vol. 9, p. 1443–1499.
- Boileau, M., et S. Orevkov. 2001. « Quasipositivity of an analytic curve in a pseudoconvex 4-ball. (Quasi-positivité d'une courbe analytique dans une boule pseudoconvexe.) ». *Geom. Topol.*, vol. 11, p. 1055–1090.
- Bott, R., et L. W. Tu. 1982. *Differential forms in algebraic topology*. T. 82, série *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag.
- Carter, J. S., et M. Saito. 1993. « Reidemeister moves for surface isotopies and their interpretation as moves to movies ». *J. Knot Theory Ramifications*, vol. 2, no. 3, p. 251–284. <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218216593000167>>.
- Cha, J. C., et C. Livingston. *KnotInfo : Table of Knot Invariant*. <<http://www.indiana.edu/~knotinfo/>>.
- Hedden, M. 2010. « Notions of positivity and the Ozsváth-Szabó concordance invariant ». *J. Knot Theory Ramifications*, vol. 19, no. 5, p. 617–629.
- Hilton, P. J., et U. Stammbach. 1997. *A course in homological algebra*. T. 4, série *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag, second édition. <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-8566-8>>.
- Hutchings, M. 2011. *Introduction to spectral sequences*. <math.berkeley.edu/~hutching/teach/215b-2011/ss.pdf>.
- Kauffman, L. H. 1988. « New invariants in the theory of knots ». *Amer. Math. Monthly*, vol. 95, no. 3, p. 195–242.
- Khovanov, M. 2000. « A categorification of the Jones polynomial ». *Duke Math. J.*, vol. 101, no. 3, p. 359–426. <<http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10131-7>>.
- Kronheimer, P. B., et T. S. Mrowka. 2011. « Khovanov homology is an unknot-detector ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* no. 113, p. 97–208.

- Lee, E. S. 2005. « An endomorphism of the Khovanov invariant ». *Adv. Math.*, vol. 197, no. 2, p. 554–586.
- Lickorish, W. B. R. 1997. *An introduction to knot theory*. T. 175, série *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag.
- Livingston, C. 2004. « Computations of the Ozsváth-Szabó knot concordance invariant ». *Geom. Topol.*, vol. 8, p. 735–742 (electronic).
- Mac Lane, S. 1998. *Categories for the working mathematician*. T. 5, série *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag, second édition.
- Rasmussen, J. 2010. « Khovanov homology and the slice genus ». *Invent. Math.*, vol. 182, no. 2, p. 419–447.
- Rolfsen, D. 1990. *Knots and links*. T. 7, série *Mathematics Lecture Series*. Houston, TX : Publish or Perish Inc. Corrected reprint of the 1976 original.
- Rotman, J. J. 2009. *An introduction to homological algebra*. Coll. « Universitext ». New York : Springer, second édition. <<http://dx.doi.org/10.1007/b98977>>.
- Rudolph, L. 1983. « Algebraic functions and closed braids ». *Topology*, vol. 22, no. 2, p. 191–202. <[http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(83\)90031-9](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(83)90031-9)>.
- . 1999. « Positive links are strongly quasipositive ». In *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*. T. 2, série *Geom. Topol. Monogr.*, p. 555–562 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry.
- Weibel, C. A. 1994. *An introduction to homological algebra*. T. 38, série *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.